

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»

Кафедра информатики и компьютерных технологий

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИНЖЕНЕРИИ

**Численные методы решения обыкновенных
дифференциальных уравнений**

*Методические указания к практическим занятиям
для магистрантов направления подготовки 15.04.02*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2015

УДК 519.62+519.63

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИНЖЕНЕРИИ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. Методические указания к практическим занятиям/ Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». Сост.: Г.Н. Журов, СПб, 2015, 62 с.

В методических указаниях представлены краткие теоретические сведения по численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений и приведены примеры решения типовых задач с помощью математического пакета MathCAD.

Методические указания предназначены для магистрантов направления 15.04.02 «Технологические машины и оборудование»

Научный редактор доц. *А.Б. Маховиков*

Табл. 3. Ил. 22. Библиогр. 5.

© Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015

ВВЕДЕНИЕ

Инженерные и научные задачи часто связаны с решением дифференциальных уравнений, так как с помощью последних описываются многие физические явления. Соответственно процессы в технических устройствах так же описываются дифференциальными уравнениями.

Природа этих процессов различна. При анализе тепловых режимов аппаратуры рассчитывают тепловые потоки, при изучении электромагнитных процессов – электрические и магнитные поля, при оценке прочности изделий вычисляют механические напряжения и деформации.

К сожалению, для многих практически важных случаев задачи, описываемые дифференциальными уравнениями, весьма сложны. Как правило, эти задачи практически исключают получение аналитических решений. В первую очередь это относится к нелинейным дифференциальным уравнениям либо к системам линейных дифференциальных уравнений высокой размерности с переменными коэффициентами.

В таких случаях единственная возможность их исследования или решения обычно связана с применением численных методов. Однако решить подобные сложные задачи также как и более простые можно с помощью компьютера. Поэтому методы решения дифференциальных уравнений на компьютере широко применяются в инженерной практике.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения по методам решения задач, включающих обыкновенные дифференциальные уравнения, а именно, задачи с начальными и краевыми условиями. Для решения задачи Коши рассмотрены одношаговые методы (Эйлера, Рунге-Кутты) и многошаговые методы (Адамса - Башфорта, Адамса - Моултона), а для решения краевой задачи метод стрельбы и метод прогонки. Представленные в методических указаниях алгоритмы решения реализованы в специализированном математическом пакете MathCAD.

Данный материал изучается магистрантами направления 15.04.02 «Технологические машины и оборудование».

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Обыкновенными дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функции. В общем виде ОДУ можно записать следующим образом: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, где x – независимая переменная, $y^{(i)}$ – i -ая производная от искомой функции. n – порядок уравнения. Общее решение ОДУ n -го порядка содержит n произвольных постоянных c_1, c_2, \dots, c_n , т.е. общее решение имеет вид $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Для выделения единственного решения необходимо задать n дополнительных условий. В зависимости от способа задания дополнительных условий существуют два различных типа задач: задача Коши и краевая задача. Если дополнительные условия задаются в одной точке, то такая задача называется задачей Коши. Дополнительные условия в задаче Коши называются начальными условиями. Если же дополнительные условия задаются в более чем одной точке, т.е. при различных значениях независимой переменной, то такая задача называется краевой. Сами дополнительные условия называются краевыми или граничными.

ЗАДАЧА КОШИ

Задачу Коши можно сформулировать следующим образом. Дано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

и начальное условие

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

Требуется найти функцию $y(x)$ на отрезке $[x_0, x_k]$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальному условию (2).

На практике подобные задачи обычно связаны с расчётом переходных электрических, нестационарных тепловых или механиче-

ских процессов при заданном в некоторый начальный момент времени исходном состоянии системы.

В краевой задаче требуется найти решение обыкновенного дифференциального уравнения с дополнительными условиями, заданными при нескольких различных значениях независимой переменной.

Например, для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (3)$$

эти условия задаются в двух разных точках $x = a$ и $x = b$:

$$y(a) = A, \text{ и } y(b) = B. \quad (4)$$

Поскольку эти точки определяют границы области $a < x < b$, в которой обычно и отыскивается решение, поставленные в них дополнительные условия называют *граничными* или *краевыми*. В инженерной практике, например, такая задача может быть связана с расчетом прогиба стержня при заданном способе закрепления его концов.

ОДНОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

К одношаговым методам относятся метод Эйлера первого порядка и метод Рунге–Кутты четвертого порядка.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА

Пусть требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2). Численное решение задачи состоит в построении таблицы приближенных значений y_1, y_2, \dots, y_n решения уравнения $y(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n . Чаще всего $x_i = x_0 + ih$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Точки x_i называются узлами сетки, а величина h - шагом ($h > 0$).

В методе Эйлера величины y_i вычисляются по формуле

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Этот метод относится к группе одношаговых методов, в которых для расчета точки (x_{i+1}, y_{i+1}) требуется информация только о последней вычисленной точке (x_i, y_i) . Метод допускает простую геометрическую интерпретацию (рис. 1). Предположим, что известна точка (x_i, y_i) на искомой интегральной кривой. Тогда касательная к этой кривой, проходящая через точку (x_i, y_i) , определяется уравнением $y = y'_i(x - x_i) + y_i$, а так как $y'_i = f(x_i, y_i)$ и $x_{i+1} = x_i + h$, то $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$.

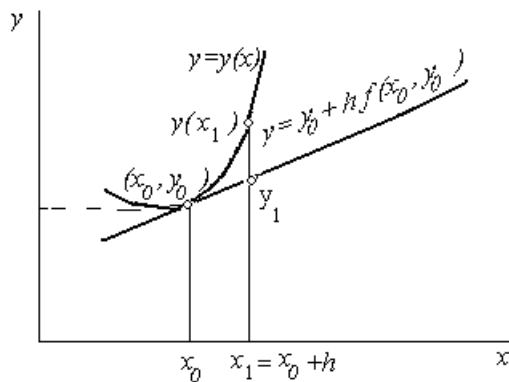


Рис. 1

Для оценки погрешности метода на одном шаге сетки разложим точное решение в ряд Тейлора в окрестности узла x_i

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + O(h^2) = \\ &= y(x_i) + hf(x_i, y_i) + O(h^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Сравнение формулы (5) с разложением (6) показывает, что они согласуются до членов первого порядка по h а погрешность форму-

лы (5) равна $O(h^2)$. Если расчетные формулы численного метода согласуются с разложением в ряд Тейлора до членов порядка h^p , то число p называют порядком метода. Таким образом, Метод Эйлера – метод первого порядка.

Для практической оценки погрешности расчета можно рекомендовать правило Рунге. Для этого проведем вычисления с шагом h и $h/2$ и сравним величины $y_i^{(h)}$ и $y_{2i}^{(h/2)}$. За оценку погрешности вычислений с шагом $h/2$ можно принять величину

$$\max_i \left| y_i^{(h)} - y_{2i}^{(h/2)} \right|. \quad (7)$$

Используем описанный алгоритм Эйлера при решении примера 1.

Пример 1. Получить численное решение дифференциального уравнения $y' + 3y = x^2 \sin x$ с начальным условием $y(0) = 40$ на интервале $[0, 20]$. Полученное решение сравнить с точным решением:

$$y_{\tau}(x) = -\frac{1}{10} \cdot x^2 \cdot \cos x + \frac{3}{25} \cdot x \cdot \cos(x) - \frac{13}{250} \cdot \cos(x) + \\ + \frac{3}{10} \cdot x^2 \cdot \sin x - \frac{4}{25} \cdot x \cdot \sin(x) + \frac{9}{250} \cdot \sin x + \frac{10013}{250} \cdot e^{-3x}$$

Решение проведем в математическом пакете MATHCAD. Результаты представлены на рис. 2-5. На рис. 2 задаются начальные значения, число точек интегрирования, правая часть дифференциального уравнения и функция Euler(x0,xk,n,y0), решающая это уравнение по формуле (5). На рис. 3 задается функция Ygez, которая уточняет полученное решение по формуле (7) с заданной точностью. На рис. 4 представлен график решения. На рис. 5 представлены результаты решения и проведено сравнение полученного решения с точным. Как видим полученное решение с заданной точностью совпадает с точным решением.

x_0 - начальное значение x_0

x_k - конечное значение отрезка интегрирования уравнения

y_0 - значение y в точке x_0

n - число точек интегрирования

h - шаг интегрирования

ϵ - оценка погрешности вычислений

f - правая часть уравнения

$x_0 := 0$ $x_k := 20$ $y_0 := 40$ $n := 10$ $\epsilon := 0.001$

$f(x, y) := x^2 \cdot \sin(x) - 3 \cdot y$

```
Euler(x0, xk, n, y0) :=  $\left\{ \begin{array}{l} x_0 \leftarrow x_0 \\ y_0 \leftarrow y_0 \\ h \leftarrow \frac{x_k - x_0}{n} \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{i+1} \leftarrow x_i + h \\ y_{i+1} \leftarrow y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \end{array} \right. \\ Y^{(0)} \leftarrow x \\ Y^{(1)} \leftarrow y \\ Y \end{array} \right.$ 
```

Рис. 2. Фрагмент рабочего документа MATHCAD с функцией, возвращающей решение дифференциального уравнения методом Эйлера


```

Yrez := | eps ← eps
        | for m ∈ 0..100000000
        |   y1 ← Euler(x0, zk, n, y0)
        |   y2 ← Euler(x0, zk, 2n, y0)
        |   for k ∈ 0..n
        |     rk ← max(|y1k,1 - y22k,1|)
        |     break if max(r) < eps
        |     n ← 2 · n otherwise
        |   (y2)
        |   (n)
n1 := Yrez1
y1 := Euler(x0, zk, n1, y0)
y2 := Euler(x0, zk, 2n1, y0)
k := 0..n1
rk := max(|y1k,1 - y22k,1|)
max(r) = 0.0007

```

$nn := 0, \frac{Yrez_1}{5} .. (2Yrez)_1$
 $(Yrez_0)_{nn,0} \quad (Yrez_0)_{nn,1} =$

0	40
2	1.02
4	-2.409
6	-5.575
8	18.564
10	-8.042
12	-33.149
14	53.607
16	1.343
18	-90.863
20	91.3

$Yrez_1 = 3.277 \times 10^5$
 $max(r) = 0.0007$

Рис. 3. Фрагмент рабочего документа МАТНСАД с функцией, уточняющей решение с заданной точностью

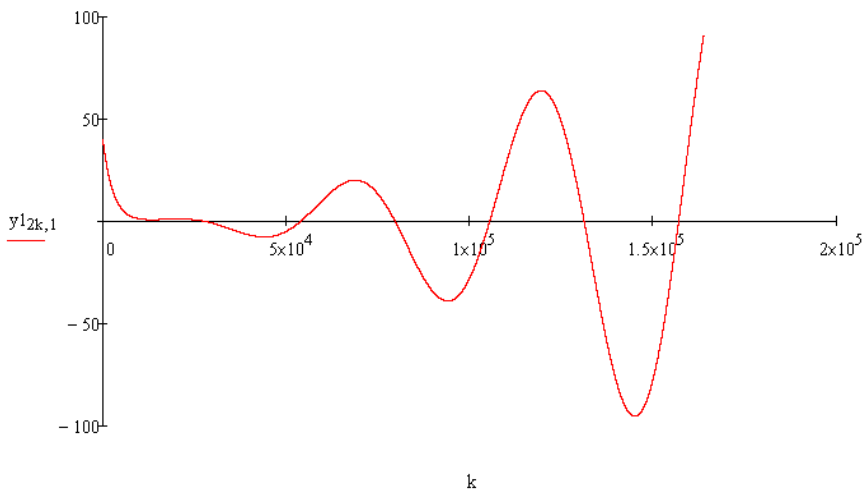


Рис. 4 Фрагмент рабочего документа МАТНСАД с графиком решения

точное решение

$x := 0..20$

$$y_T(x) := \frac{10013 \cdot e^{-3x}}{250} - \frac{13 \cdot \cos(x)}{250} + \frac{9 \cdot \sin(x)}{250} - \frac{x^2 \cdot \cos(x)}{10} + \frac{3 \cdot x^2 \cdot \sin(x)}{10} + \frac{3 \cdot x \cdot \cos(x)}{25} - \frac{4 \cdot x \cdot \sin(x)}{25}$$

$E_x := (\text{Yrez0}) \frac{\text{Yrez1}}{10} x, 1$ **Решение методом Эйлера**

$x =$	$y_T(x) =$	$E_x =$	$x =$	$y_T(x) =$	$E_x =$
0	40	40	11	-34.624	-34.624
1	2.125	2.125	12	-33.149	-33.149
2	1.02	1.02	13	6.476	6.476
3	0.909	0.909	14	53.607	53.607
4	-2.409	-2.409	15	58.122	58.123
5	-7.013	-7.013	16	1.343	1.343
6	-5.575	-5.575	17	-73.368	-73.368
7	5.845	5.845	18	-90.862	-90.863
8	18.564	18.564	19	-17.708	-17.708
9	15.879	15.879	20	91.3	91.3
10	-8.042	-8.042			

Рис. 5. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – сравнение решения методом Эйлера с точным решением

Задание 1. Используя метод Эйлера получить численное решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, с начальным условием $y(x_0) = y_0$ на интервале $[x_0, x_k]$ с точностью eps . Построить график решения. Исходные данные представлены в таблице 1.

Варианты заданий

Таблица 1

Номер варианта	$f(x, y)$	x_0	x_k	y_0	eps
1	$\cos(x \cdot y)$	1	4	3	0,001
2	$x \cdot y^2 - \cos\left(\frac{y}{\pi}\right)$	0	4	-0,5	0,0001

Продолжение таблицы 1

Номер варианта	$f(x, y)$	x_0	x_k	y_0	eps
3	$y + \ln(x + y)$	1	2	5	0,01
4	$x \cdot \sin\left(\frac{x \cdot y}{x + y}\right)$	2	10	3	0,001
5	$x \cdot \cos\left(\frac{x^2 \cdot y}{x - y}\right)$	3	9	-1	0,001
6	$x \cdot \cos\left(\frac{x^2 \cdot y}{x - y}\right)$	1	6	-0,5	0,0001
7	$x \cdot \sin\left(\frac{x^2 \cdot y}{x - y}\right)$	1	7	0,65	0,001
8	$x^3 \cdot y^2 - e^{x \cdot y}$	1	4	2,5	0,001
9	$y - \ln(x^2 \cdot y)$	1	6	2	0,01
10	$y^{-x} - \tan(x \cdot y^2)$	1,5	7	2	0,001
11	$2 \cdot x^2 - \ln(x^2 \cdot y)$	1	9	1	0,01
12	$2 \cdot x^2 + \ln(x + y)$	1,3	2,8	1	0,1
13	$x^2 \cdot \cos(x - y)$	1	5	1	0,001
14	$x^2 \cdot \sin(x^2 - y)$	1	3	1	0,001
15	$y^2 \cdot \sin(x^2 + y)$	0	4	0,5	0,001
16	$y^{-x} \cdot \sin(x^3 + y)$	0	7	0,7	0,001
17	$y^{-x} \cdot \sin(x^3 + y^2)$	0	4	1,5	0,001
18	$x^3 \cdot \sin(x^3 - y^2)$	0	8	-1	0,0001
19	$y^{-3 \cdot x} \cdot \sin(x + y^2)$	0	7	1,4	0,001
20	$y^{-2 \cdot x} \cdot \sin(x - y^2)$	0	8	1,1	0,001

Метод Эйлера легко обобщается на случай нормальных систем дифференциальных уравнений. Пусть требуется найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0},$$

или в векторной форме $Y' = F(x, Y)$, $Y(x_0) = Y_0$,

$$Y(x) = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}, \quad Y_0 = \{y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}\}$$

Приближенные значения $y_k(x_i)$ в точках x_i вычисляются по формулам

$$y_{ki} = y_{ki-1} + h f_k(x_{i-1}, y_{1(i-1)}, y_{2(i-1)}, \dots, y_{n(i-1)}), \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots$$

Пример 2. Методом Эйлера на отрезке $[0, 3]$ с точностью $eps = 0,001$ решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = e^{-x \cdot y_1}, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = 0, \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Построить график решения.

Результаты решения в математическом пакете MATHCAD представлены на рис. 6.

$$x_0 := 0 \quad x_k := 3 \quad y_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ e^{-xy_0} \end{pmatrix} \quad n := 30 \quad \text{eps} := 0.001$$

```

Euler(x0, xk, n, y0) :=
  x0 ← x0
  y0 ← y0
  h ← (xk - x0) / n
  for i ∈ 0..n-1
    xi+1 ← xi + h
    yi+1 ← yi + h · f(xi, yi)
  Y<0> ← x
  Y<1> ← y
  Y

Yrez :=
  eps ← eps
  for m ∈ 0..100000000
    y1 ← Euler(x0, xk, n, y0)
    y2 ← Euler(x0, xk, 2n, y0)
    for k ∈ 0..n
      rk ← max(|y1k,1 - y2k,1|)
    break if max(r) < eps
    n ← 2 · n otherwise
  (y1)
  (n)

```

$$Yrez_1 = 1.92 \times 10^3 \quad n := Yrez_1 \quad mn := 0, \frac{n}{10} .. n \quad y := \text{Euler}(x_0, x_k, n, y_0)$$

$(y_{nn}, 1)_0 =$	$(y_{nn}, 1)_1 =$
0	0
0.045	0.299
0.178	0.585
0.391	0.827
0.667	1.001
0.984	1.101
1.322	1.147
1.669	1.164
2.019	1.169
2.37	1.17
2.721	1.171

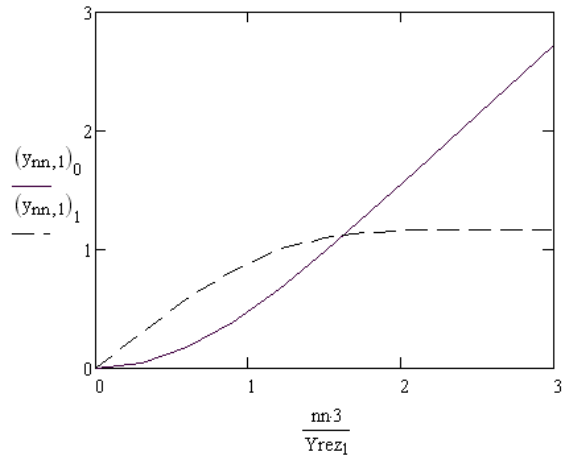


Рис. 6. Рабочий документ MATHCAD – решение примера 2 методом Эйлера

Задание 2. Методом Эйлера на отрезке $[x_0, x_k]$ с точностью eps решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2), & y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2), & y_2(x_0) = y_{20}. \end{cases}$$

Построить график решения. Исходные данные представлены в таблице 2.

Таблица 2

Номер варианта	$f_1(x, y_1, y_2)$ $f_2(x, y_1, y_2)$	x_0	x_k	y_{10} y_{20}	eps
1	$\cos(x + y_2)$ $\sin(x - y_1)$	0	8	0,5 -0,5	0,001
2	$\arctg(x \cdot y_2)$ $\sin(y_1)$	-2,2	1,8	0,1 0	0,001
3	$\sin(y_2)$ $\cos(y_1)$	1	7	0,4 -0,6	0,01
4	$\sqrt{1 + x^2 + y_2^2}$ $\sin(y_1 \cdot y_2)$	-1	4	-1 1	0,01
5	$\arctg\left(\frac{1}{1 + y_1^2 + y_2^2}\right)$ $\sin(y_1 \cdot y_2)$	-1	5	1 1	0,0001
6	$\frac{1}{3 + e^{-y_2}}$ $\frac{1}{2 + e^{-y_1}}$	2	7	0,2 -3	0,0001
7	$e^{-(y_1 + y_2)}$ $\arctg(y_1)$	0	5	1 -1	0,001

Продолжение таблицы 2

Номер варианта	$f_1(x, y_1, y_2)$ $f_2(x, y_1, y_2)$	x_0	x_k	y_{10} y_{20}	eps
8	$\frac{y_1^2}{y_2}$ $y_1^2 - y_2$	1	3	1 1	0,001
9	$\frac{1}{y_1^2 + y_2^2}$ $\frac{2}{y_1^2 + y_2^2}$	2	12	1 -1	0,001
10	$\sin(y_1) \cdot \cos^3(y_2)$ $\cos(y_1) \cdot \cos(y_2)$	-1	3	0,8 0,2	0,01
11	$\frac{1}{ch(x + y_2)}$ $sh(x^2 - y_1)$	0	3	2 1	0,01
12	$\ln(x) \cdot y_2$ $y_1 + y_2^2$	1	4	-4 -6	0,01
13	$y_2 + \sqrt{x^2 + y_1^2}$ $\cos(x) \cdot y_2 - \sin(2 \cdot x)$	2	4	4 8	0,001
14	$\sin^3(y_2)$ $\cos^2(y_1)$	0	6	0.5 -1	0,01
15	$\frac{\cos^2(x + y_2)}{\sin(x - y_1)}$ 2	0	3	0.3 -0.6	0,0001
16	$\frac{\cos(x + y_2^2)}{2}$ $\ln(x) \cdot \sin^3(x - y_1)$	1	6	0.2 -0.5	0,01

Продолжение таблицы 2

Номер варианта	$f_1(x, y_1, y_2)$ $f_2(x, y_1, y_2)$	x_0	x_k	y_{10} y_{20}	eps
17	$\ln(x+2) \cdot y_2^2$ $\sin(x - y_1^2)$	1	3	-1 1	0,001
18	$\sin(x) \cdot e^{-x \cdot y_1}$ $\cos(y_2) \cdot e^{-\frac{x}{y_1^2}}$	1	6	0,2 0,5	0,0001
19	$e^{\frac{x+y_1}{y_1+y_2}}$ $e^{\frac{y_1-x_1}{y_1+y_2}}$	2	4	1 -1	0,01
20	$\arctg\left(\frac{1}{1+y_1^2}\right)$ $\cos^4(y_1 \cdot y_2)$	-2	5	1 1	0,0001

МЕТОД РУНГЕ-КУТТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Пусть требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2). Численное решение задачи состоит в построении таблицы приближенных значений y_1, y_2, \dots, y_n решения уравнения $y(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n . Точки x_1, x_2, \dots, x_n - узлы сетки. Используем систему равноотстоящих узлов. Величина h - шаг сетки ($h > 0$).

Методом Рунге–Кутта обычно называют одношаговый метод четвертого порядка, относящийся к широкому классу методов типа Рунге–Кутта. В этом методе величины y_{i+1} вычисляют по следующим формулам:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{6}\right) \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \quad (7)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3).$$

Погрешность метода на одном шаге сетки равна Ch^4 , но на практике оценить величину C обычно трудно. При оценке погрешности используют правило Рунге. Для этого проводят вычисления сначала с шагом h , а затем – с шагом $h/2$. Если $y_i^{(h)}$ - приближение, вычисленное с шагом h , а $y_{2i}^{(h/2)}$ - с шагом $h/2$, то справедлива оценка

$$\left|y_{2i}^{(h/2)} - y(x_{2i})\right| \leq \frac{16}{15} \left|y_{2i}^{(h/2)} - y_i^{(h)}\right|.$$

За оценку погрешности вычислений с шагом $h/2$ можно принять величину

$$\max \frac{\left|y_i^{(h)} - y_{2i}^{(h/2)}\right|}{15}. \quad (8)$$

Решим пример 1 методом Рунге-Кутты. Результаты представим на рис. 7. Сначала задаются начальные значения, число точек интегрирования, правая часть дифференциального уравнения и функция $\text{RungeKutta}(x_0, x_k, n, y_0)$, решающая это уравнение по формулам (7). Затем задается функция $Ygez$, которая уточняет полученное решение по формуле (8) с заданной точностью.

```

x0 := 0  xk := 20  y0 := 40  n := 10  eps := 0.001  f(x,y) := x^2 * sin(x) - 3 * y
RungeKutta(x0,xk,n,y0) :=
  x0 ← x0
  y0 ← y0
  h ← (xk - x0) / n
  for i ∈ 0..n-1
    xi+1 ← xi + h
    k1i ← h · f(xi, yi)
    k2i ← h · f(xi + h/2, yi + k1i/2)
    k3i ← h · f(xi + h/2, yi + k2i/2)
    k4i ← h · f(xi + h, yi + k3i)
    yi+1 ← yi + 1/6 · (k1i + 2 · k2i + 2 · k3i + k4i)
  Y<0> ← x
  Y<1> ← y
  Y

  Yrez :=
    eps ← eps
    for m ∈ 0..1000000
      y1 ← RungeKutta(x0,xk,n,y0)
      y2 ← RungeKutta(x0,xk,2n,y0)
      for k ∈ 0..n
        rk ← max(|y1k,1 - y2k,1| / 15)
        break if max(r) < eps
      n ← 2 · n otherwise
    (y2)
  nn := 0, Yrez1 / 5 .. (2Yrez)1
  (Yrez0)nn,0  (Yrez0)nn,1 =

```

0	40
2	1.02
4	-2.409
6	-5.575
8	18.564
10	-8.042
12	-33.149
14	53.607
16	1.343
18	-90.862
20	91.3

```

  Yrez1 = 160
  n1 := Yrez1
  y1 := RungeKutta(x0,xk,n1,y0)
  y2 := RungeKutta(x0,xk,2n1,y0)
  k := 0..n1
  rk := max(|y1k,1 - y2k,1| / 15)
  max(r) = 0.000208

```

Рис. 7. Рабочий документ MATHCAD – решение примера 1 методом Рунге-Кутта

Как видим результаты вычислений по методу Рунге-Кутта, также совпали с точным решением, как и с помощью метода Эйлера. Однако, для того чтобы это совпадение произошло по методу Рунге-Кутта нам пришлось умешать шаг в 2048 раз меньше, чем с помощью метода Эйлера, что приводит к уменьшению ошибки округления и значительной экономии машинного времени.

Метод Рунге-Кутта легко переносится на нормальные системы дифференциальных уравнений вида

$$y'_k(x) = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad 1 \leq k \leq n,$$

которые для краткости удобно записывать в векторной форме

$$Y'(x) = F(x, Y), \\ Y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

Для получения расчетных формул методом Рунге-Кутта достаточно в формулах (7) заменить y и $f(x, y)$ соответственно на Y и $F(x, Y)$, а коэффициенты k_j - на K_j ($j = 1, 2, 3, 4$).

Пример 3. Методом Рунге-Кутта на отрезке $[0, 2]$ с точностью $eps = 0,0000001$ решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_2 + \sin(x \cdot y_3), \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1^2, \\ \frac{dy_3}{dx} = -y_3 - y_1, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 0, \\ y_3(0) = 1. \end{cases}$$

Построить график решения.

Результаты решения в математическом пакете MATHCAD представлены на рис. 8.

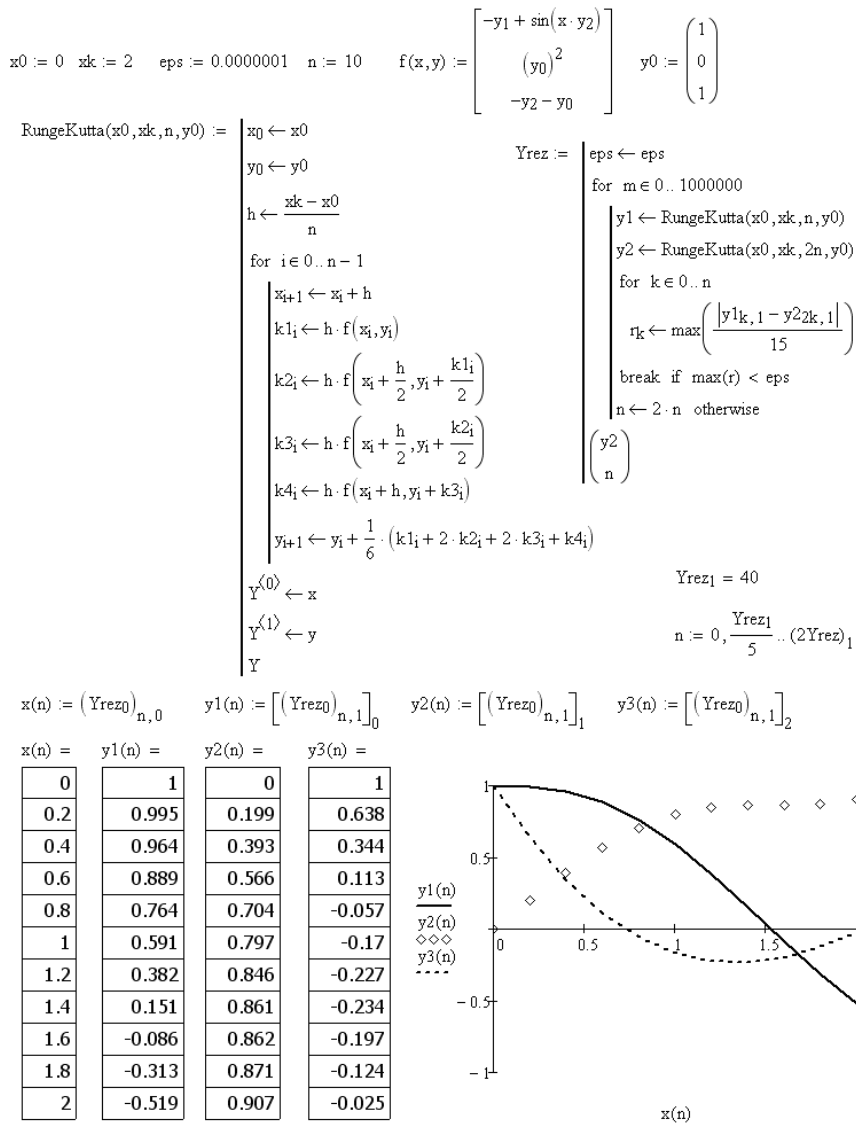


Рис. 8. Рабочий документ MATHCAD – решение примера 3 методом Рунге-Кутты

Задание 3. Методом Рунге-Кутта на отрезке $[x_0, x_k]$ с точностью $eps = 0,000001$ решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, y_3), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, y_3), \\ y_3' = f_3(x, y_1, y_2, y_3), \end{cases} \begin{cases} y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2(x_0) = y_{20}, \\ y_3(x_0) = y_{30} \end{cases}$$

Построить график решения. Исходные данные представлены в таблице 3.

Таблица 3

Номер варианта	$f_1(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_2(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_3(x, y_1, y_2, y_3)$	x_0	x_k	y_{10} y_{20} y_{30}
1	$e^{y_3 - y_1}$ $\sin(x \cdot y_3)$ $\sqrt{x^2 + y_1^2 + y_2^2}$	1	3	2 -1 0
2	$2y_1^2 + y_2 \cdot y_3$ $y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 + y_1^3$ $\sqrt{1 + y_1^2 + y_2^2}$	-1	0	-2 -7 2
3	$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$ $x^2 \cdot y_2^2$ $\lg(x^2 + y_1^2)$	0,2	2,2	0,1 -1 0,5
4	$\sin(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)$ $\ln(x^2 + y_3^2)$ $e^{-y_1 \cdot y_2 \cdot y_3}$	1	5	1 1 1

Продолжение таблицы 3

Номер варианта	$f_1(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_2(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_3(x, y_1, y_2, y_3)$	x_0	x_k	y_{10} y_{20} y_{30}
5	$\cos(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)$ $y_1^2 + y_2 + y_3^2$ $\sin(y_1 + y_3)$	1,5	3,5	0,7 1 -0,7
6	$sh(x \cdot y_1 + y_2 \cdot y_3)$ $ch(x \cdot y_1 + y_2 \cdot y_3)$ $\sin(y_1 \cdot y_2 + y_3)$	0,75	2	0,3 -1 0,4
7	$\ln(x^2 + y_1^2)$ $arctg(x \cdot y_1 \cdot y_3)$ $\sin(arctg(y_1 \cdot y_3))$	-2	6	-2 -5 4
8	$\sin(x^2 + y_1^2)$ $arctg(x \cdot y_1 \cdot y_3)$ $\cos(arctg(y_1 \cdot y_2))$	0	4	-1 -2 2
9	$-y_2 + \cos(x \cdot y_3)$ y_1^3 $-\frac{y_3}{2} - 2y_1^2$	1	5	0 0 0
10	$\frac{1}{2y_1^2 + y_2 \cdot y_3}$ $\frac{1}{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3}$ $\sqrt{1 + y_3^2}$	-3	1	1 3 1

Продолжение таблицы 3

Номер варианта	$f_1(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_2(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_3(x, y_1, y_2, y_3)$	x_0	x_k	y_{10} y_{20} y_{30}
11	$\cos(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)$ $e^{x \cdot y_1 \cdot y_3}$ $\sin(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)$	1	5	-2 1 3
12	$e^{\sin(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)}$ $y_1^2 + y_2 + y_3$ $\cos(y_1 + y_3)$	0,6	2,6	0,5 0,75 -0,5
13	$\ln(x \cdot y_1 + y_2 \cdot y_3)$ $\lg(x \cdot y_1 \cdot y_2 + y_3)$ $\cos(y_1 \cdot y_2 + y_3)$	0	4	0,75 0,5 1
14	$e^{x \cdot y_1 + y_2 \cdot y_3}$ $\sqrt{x \cdot y_1 \cdot y_2 + y_3}$ $\sin(y_1 \cdot y_2 + y_3)$	0	1	0 0,5 0
15	$\ln(x^2 + y_1^2)$ $\arctg(x \cdot y_1 \cdot y_3)$ $\sin(\arctg(y_1 \cdot y_2))$	-3	3	-1 -7 2
16	$\frac{1}{2 + e^{y_1 \cdot y_2}}$ $\frac{1}{2 + \sin(y_1 \cdot y_3)}$ $\frac{3}{3 + \cos(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)}$	-1	3	-1 0,5 1,3

Продолжение таблицы 3

Номер варианта	$f_1(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_2(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_3(x, y_1, y_2, y_3)$	x_0	x_k	y_{10} y_{20} y_{30}
17	$\sqrt{x^2 + y_2^2}$ $e^{\arctg(x \cdot y_1 \cdot y_3)}$ $\cos(\arctg(y_1 \cdot y_3))$	-4	2	-3 6 -4
18	$e^{x \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot y_3}$ $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y_2^2}}$ $\cos(x^2 + y_3^2)$	0,9	2,2	0,1 0,2 0,3
19	$\sqrt[4]{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3}$ $\sqrt[3]{x \cdot y_1 \cdot y_3}$ $\sin(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)$	2	4	2 0 3
20	$-y_2 + \sin(x \cdot y_3)$ y_1^3 $-y_3 - y_1^2$	1	5	0 1 1

МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Из вышеизложенного видно, что снижение погрешности решения задачи Коши может быть обеспечено использованием одношаговых методов высоких порядков точности. При этом в пределах каждого шага интегрирования приходится вводить промежуточные точки и увеличивать и объем вычислений.

Снизить вычислительные затраты без ухудшения погрешности можно, если на очередном шаге уточняющую информацию получать

не за счет дополнительных точек, а из предыдущих шагов. Действительно, если в расчете использовать не только последнюю из известных точек решения, а еще и ряд предыдущих, можно более точно предсказать дальнейший ход кривой. Методы, реализующие эту идею, получили название *многошаговых*.

МЕТОД АДАМСА-БАШФОРТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Пусть требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2). Как обычно, численное решение задачи состоит в построении таблицы приближенных значений y_1, y_2, \dots, y_n решения уравнения $y(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n . Чаще всего $x_i = x_0 + ih$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Точки x_i - узлы сетки, а величина h - шаг ($h > 0$).

В методе Адамса-Башфорта четвертого порядка величины y_{i+1} вычисляются по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3})). \quad (9)$$

Этот метод относится к группе многошаговых методов, в которых для нахождения точки (x_{i+1}, y_{i+1}) требуется информация о нескольких предыдущих точках. Формула Адамса-Башфорта принадлежит к классу четырехшаговых методов, поскольку в (9) используется информация о четырех предыдущих точках. Важной характеристикой метода является порядок точности. Для метода Адамса-Башфорта (9) он равен 4, т. е. погрешность метода на одном шаге равна $O(h^5)$.

Сравним методы Рунге-Кутты четвертого порядка и Адамса-Башфорта четвертого порядка. Для обоих методов порядок погрешности (но не сама погрешность!) одинаков и составляет величину $O(h^5)$. Однако способы достижения такой достаточно высокой точ-

ности различны. В методе Адамса-Башфорта (и других многошаговых методах) она достигается за счет использования информации о предыдущих точках. В методе Рунге-Кутты (и других одношаговых методах) недостающую информацию о поведении правых частей системы получают в результате вычислений в специальном образом выбранных дополнительных точках.

Таким образом, многошаговые методы более экономичны, чем одношаговые (не требуют дополнительных вычислений). В этом состоит достоинство многошаговых методов. Однако эти методы обладают общим недостатком – с их помощью нельзя начать решать задачу, так как требуется информация о ряде предыдущих точек, которой мы не располагаем. Выход из положения состоит в использовании какого либо одношагового метода того же порядка точности до тех пор, пока не будет получено достаточно значений для работы многошагового метода. Мы будем использовать для этой цели метод Рунге-Кутты четвертого порядка. К недостаткам многошаговых методов относится трудность смены шага, так как расчетные формулы не учитывают эту возможность. Данная проблема решена в многозначных методах, использующих иную экстраполяцию решения.

Метод Адамса-Башфорта легко перенести на нормальные системы дифференциальных уравнений вида

$$y'_k(x) = f_k(x, y_1, \dots, y_n), \quad 1 \leq k \leq n,$$

которые для краткости удобнее записывать в векторной форме

$$Y' = F(x, Y), \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad F = (f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Для получения расчетных формул метода Адамса-Башфорта достаточно в формулах (9) заменить y и $f(x, y)$ соответственно на Y и $F(x, Y)$.

Методику решения нормальных систем дифференциальных уравнений легко перенести на решение одного дифференциального уравнения более высокого порядка, чем первый, поскольку любое дифференциальное уравнение порядка n

$$y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y)$$

путем замены

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= y(x); \\
y_2(x) &= y'(x); \\
&\dots \\
y_n(x) &= y^{(n-1)}(x)
\end{aligned}$$

может быть представлено в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
y_1'(x) &= y_2(x); \\
y_2'(x) &= y_3(x); \\
&\dots \\
y_n'(x) &= f(x, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y).
\end{aligned}$$

Заметим, что в приведенных уравнениях содержатся производные только первого порядка.

Пример 4. Методом Адамса-Башфорта на отрезке $[0,6]$ с точностью $eps = 0,0001$ решить задачу Коши для дифференциального уравнения третьего порядка

$$\begin{aligned}
y'''(x) + x^2 \cdot y'(x) + x \cdot y(x) &= e^x \cdot \cos(x), \\
y(0) = -8, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) &= 3.
\end{aligned}$$

Построить график решения.

Результаты решения в математическом пакете MATHCAD представлены на рис. 9-11.

$$\begin{array}{l}
x0 := 0 \quad xk := 6 \\
n := 60 \quad eps := 0.001 \quad y0 := \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f(x,y) := \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ e^x \cos(x) - x^2 \cdot y1 - x \cdot y0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Рис. 9. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 4 методом Адамса-Башфорта (задание исходных данных)

```

AdamsBashfort(x0, xk, n, y0) :=
  x0 ← x0
  y0 ← y0
  h ←  $\frac{xk - x0}{n}$ 
  for i ∈ 0..2
    xi+1 ← xi + h
    k1i ← h·f(xi, yi)
    k2i ← h·f( $xi + \frac{h}{2}, yi + \frac{k1i}{2}$ )
    k3i ← h·f( $xi + \frac{h}{2}, yi + \frac{k2i}{2}$ )
    k4i ← h·f(xi + h, yi + k3i)
    yi+1 ← yi +  $\frac{1}{6} \cdot (k1i + 2 \cdot k2i + 2 \cdot k3i + k4i)$ 
  for i ∈ 3..n-1
    xi+1 ← xi + h
    k1i ← h·f(xi, yi)
    k2i ← h·f(xi-1, yi-1)
    k3i ← h·f(xi-2, yi-2)
    k4i ← h·f(xi-3, yi-3)
    yi+1 ← yi +  $\frac{1}{24} \cdot (55 \cdot k1i - 59 \cdot k2i + 37 \cdot k3i - 9 \cdot k4i)$ 
  Y<0> ← x
  Y<1> ← y
  Y

```

Рис. 10. Фрагмент рабочего документа MATHCAD- решение примера 4 с функцией, возвращающей решение дифференциального уравнения методом Адамса-Башфорта

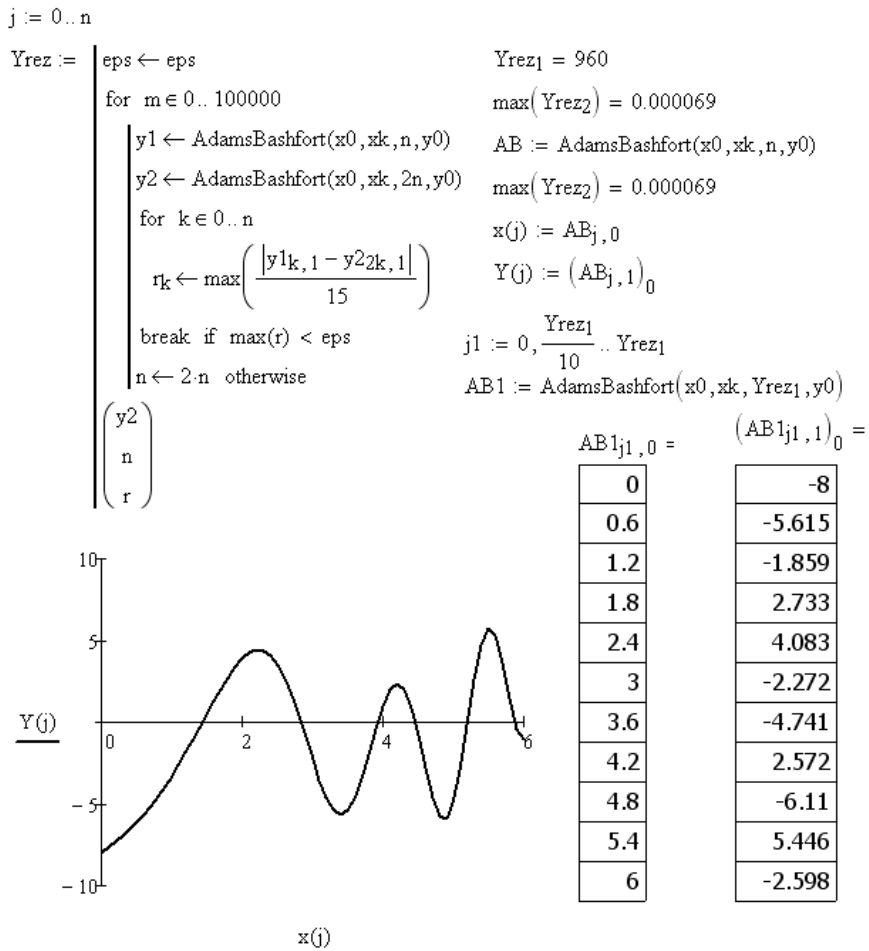


Рис. 11. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 4 (график решения с функцией, уточняющей решение с заданной точностью)

Задание 4. Методом Адамса-Башфорта для $x \in [x_0, x_k]$ с точностью $eps = 0,000001$ решить задачу Коши для дифференциального уравнения третьего порядка. Построить график решения. Варианты заданий представлены ниже.

Вариант 1.

$$y'''(x) + \cos(x) \cdot y''(x) + x \cdot \cos^2(x) \cdot y'(x) + 2 \cdot y(x) = x^2 \cdot \sin(x),$$

$$y(x_0) = -8, \quad y'(x_0) = 3, \quad y''(x_0) = 3, \quad x_0 = 0, \quad x_k = 9.$$

Вариант 2.

$$y'''(x) + 2 \cdot x \cdot y''(x) + \operatorname{tg}(x) \cdot y'(x) + (x+1) \cdot \ln(|x+1|) \cdot y(x) = e^{\sin(x)},$$

$$y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = 2, \quad y''(x_0) = -3, \quad x_0 = -1,5, \quad x_k = 1,5.$$

Вариант 3.

$$y'''(x) - x^2 \cdot \sin(x^2) \cdot y''(x) + \frac{1}{x} \cdot y'(x) + \sqrt{x^4 + 3 \cdot x + 4} \cdot y(x) =$$

$$= \cos(x^2 + 3),$$

$$y(x_0) = -3, \quad y'(x_0) = -2, \quad y''(x_0) = 2, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 4.$$

Вариант 4.

$$y'''(x) + \sqrt{x^2 + 1} \cdot y''(x) + [\cos(x) + x \cdot \sin(x)] \cdot y'(x) + x e^{-x} \cdot y(x) = 4,$$

$$y(x_0) = 2, \quad y'(x_0) = 0, \quad y''(x_0) = 5, \quad x_0 = 0, \quad x_k = 12.$$

Вариант 5.

$$y'''(x) + \ln(x^2 + 4) \cdot y''(x) + \cos(x^2 + 6) \cdot y'(x) + \frac{x^2 - 3}{x + 2} \cdot y(x) = 0,$$

$$y(x_0) = 5, \quad y'(x_0) = -1, \quad y''(x_0) = -5, \quad x_0 = -1,2, \quad x_k = 1,2.$$

Вариант 6.

$$y'''(x) + 2 \cdot y''(x) + e^x \cdot y'(x) + \operatorname{arctg}(x^2 + 4) \cdot y(x) = \cos\left(\frac{x}{x+2}\right),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 1, \quad y''(x_0) = -2, \quad x_0 = -\pi, \quad x_k = \pi.$$

Вариант 7.

$$y'''(x) + \ln(x^2 + 3) \cdot y''(x) + x^3 \cdot \cos(x) \cdot y'(x) + (2 \cdot x^2 + 1) \cdot y(x) =$$

$$= \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$y(x_0) = -3, \quad y'(x_0) = 3, \quad y''(x_0) = 4, \quad x_0 = 3, \quad x_k = 8.$$

Вариант 8.

$$y'''(x) + \operatorname{sh}\left(\frac{x^2 + 3}{x + 3}\right) \cdot y''(x) + \operatorname{lg}(x^2 + 2) \cdot y'(x) + x^3 \cdot y(x) = \\ = x^2 \cdot \cos(x^2),$$

$$y(x_0) = -10, \quad y'(x_0) = 0, \quad y''(x_0) = 2, \quad x_0 = -2, \quad x_k = 2,9.$$

Вариант 9.

$$y'''(x) + x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot y''(x) + 2x \cdot y'(x) + \sqrt{x^4 + 1} \cdot y(x) = 2x^3 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$y(x_0) = -3, \quad y'(x_0) = -4, \quad y''(x_0) = -3, \quad x_0 = -2, \quad x_k = 4.$$

Вариант 10.

$$y'''(x) + 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right) \cdot y'(x) + e^{x+1} \cdot y(x) = x^4 \cdot \cos(2 \cdot x)$$

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 1, \quad y''(x_0) = 1, \quad x_0 = -1,2, \quad x_k = 1,4.$$

Вариант 11.

$$y'''(x) + \operatorname{tg}(x^2 - 1) \cdot y''(x) + x^2 \cdot \sin(x^2 - 1) \cdot y'(x) + \\ + \sin\left(\frac{x + 2}{2}\right) \cdot y(x) = \sqrt[3]{x^4 - 2 \cdot x + 1},$$

$$y(x_0) = -1, \quad y'(x_0) = 0, \quad y''(x_0) = -0,5, \quad x_0 = -1, \quad x_k = \frac{\pi}{2}.$$

Вариант 12.

$$y'''(x) + x^4 \cdot \ln(x) \cdot y''(x) + 2 \cdot x^2 \cdot \sin(x) \cdot y'(x) + \\ + \ln(x^5 + 2 \cdot x^3 + 4) \cdot y(x) = e^{\cos(x)}$$

$$y(x_0) = -3, \quad y'(x_0) = 1, \quad y''(x_0) = 2, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 3,5.$$

Вариант 13.

$$y'''(x) + e^{\sin(x)} \cdot y''(x) + (2 \cdot x^3 + 1) \cdot y'(x) + \operatorname{arctg}(x^2 + 1) \cdot y(x) \\ = \sin(x^2 + 1),$$

$$y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = 2, \quad y''(x_0) = 3, \quad x_0 = -4, \quad x_k = 4.$$

Вариант 14.

$$y'''(x) + \sin(x^2) \cdot y''(x) + x^2 \sin(x) \cdot y'(x) + x \cos(x^2) \cdot y(x) = \cos(x^2),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 1, \quad y''(x_0) = 2, \quad x_0 = 0, \quad x_k = 3,8.$$

Вариант 15.

$$y'''(x) + \operatorname{arsch}(x) \cdot y''(x) + \operatorname{tg}(x^2 + 4) \cdot y'(x) + \sqrt{x^2 + 4} \cdot y(x) = \\ = x^2 \cdot \sin(x),$$

$$y(x_0) = 2, \quad y'(x_0) = -2, \quad y''(x_0) = -5, \quad x_0 = -0,5, \quad x_k = 0,5.$$

Вариант 16.

$$y'''(x) + \ln(x^3 - 2) \cdot y''(x) + 2 \cdot x \cdot y'(x) + 6 \cdot x^3 \cdot y(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x+1}\right),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 2, \quad y''(x_0) = 1, \quad x_0 = 4,5, \quad x_k = 6.$$

Вариант 17.

$$y'''(x) + \sqrt{x^3 - 2} \cdot y''(x) + y'(x) + \frac{\cos(x^3 - 1)}{x^2 + 4} \cdot y(x) = \operatorname{ars}h(x + 1),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = -10, \quad y''(x_0) = -2, \quad x_0 = 2, \quad x_k = 8.$$

Вариант 18.

$$y'''(x) + x^3 \cdot e^{-3 \cdot x} \cdot y''(x) + 4 \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot y'(x) = x^2 \cdot \sin(2 \cdot x)$$

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 1, \quad y''(x_0) = 1, \quad x_0 = -1,2, \quad x_k = 2,6.$$

Вариант 19.

$$y'''(x) + \ln(x^2 + 1) \cdot y''(x) + 3 \cdot x \cdot y(x) = x^4 \cdot \cos(x) + x^2 \cdot \sin(x)$$

$$y(x_0) = -1, \quad y'(x_0) = -1, \quad y''(x_0) = -1, \quad x_0 = -3, \quad x_k = 6.$$

Вариант 20.

$$y'''(x) + x^3 \cdot \ln(|x + 1|) \cdot y''(x) + \operatorname{tg}(x) \cdot y'(x) + \operatorname{arcctg}(x) \cdot y(x) = \\ = x^2 \cdot e^{\cos(x+1)},$$

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 1, \quad y''(x_0) = 0, \quad x_0 = -1,5, \quad x_k = 1,5.$$

МЕТОД АДАМСА-МОУЛТОНА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Пусть требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2). Как обычно, численное решение задачи состоит в построении таблицы приближенных значений y_1, y_2, \dots, y_n решения уравнения $y(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n . Чаще всего $x_i = x_0 + ih$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Точки x_i - узлы сетки, а величина h - шаг ($h > 0$).

В методе Адамса-Моултона четвертого порядка величины y_{i+1} вычисляются по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (9f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 19f(x_i, y_i) - 5f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})). \quad (10)$$

Этот метод относится к группе многошаговых методов, в которых для нахождения точки (x_{i+1}, y_{i+1}) требуется информация о нескольких предыдущих точках.

Сравним теперь метод Адамса-Моултона с методом Адамса-Башфорта. Эти методы относятся к группе многошаговых. Для обоих методов порядок погрешности одинаков и составляет величину $O(h^5)$. Установим, в чем же состоит разница между методами Адамса-Башфорта и Адамса-Моултона. В методе Адамса-Башфорта вычисление y_{i+1} проводится по формуле (9). Подлежащая определению величина y_{i+1} входит только в левую часть формулы (9). В методе Адамса-Моултона величина y_{i+1} входит не только в левую, но и правую часть формулы (10). Таким образом, в формуле (10) величина y_{i+1} определяется неявно, поэтому для вычисления величины $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ нужно знать значение y_{i+1} , которое само пока неизвестно. Таким образом, формула (10) представляет собой уравнение

для величины y_{i+1} , которое следует решать каким-либо (вообще говоря, численным) методом. Вот почему методы Адамса-Моултона называют *неявными* многошаговыми методами; напротив, методы Адамса-Башфорта относятся к группе *явных* многошаговых методов.

На практике, как правило, неявный метод Адамса-Моултона используют совместно с явным методом Адамса-Башфорта по следующей схеме:

вычисляем методом Рунге-Кутты «стартовые» значения $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3}$ в точках $x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3}$ и делаем прогноз для величин y_{i+1} с помощью явного метода Адамса-Башфорта

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + \frac{h}{24}(55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3})). \quad (11)$$

затем корректируем величину y_{i+1} по формуле

$$y_{i+1}^{(m+1)} = y_i + \frac{h}{24}(9f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(m)}) + 19f(x_i, y_i) - 5f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})). \quad (12)$$

Теперь можно организовать итерационный процесс для уточнения величины y_{i+1} . Если $y_{i+1}^{(k)}$ - значение после k итераций, то $(k+1)$ -е уточненное значение величины y_{i+1} можно вычислять по формуле

$$y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + \frac{h}{24}(9f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}) + 19f(x_i, y_i) - 5f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})).$$

Итерации можно прекратить, когда две последовательные итерации дают практически одинаковые результаты, т. е. при вы-

полнении условия $\left| y_{i+1}^{(k+1)} - y_i^{(k)} \right| < \varepsilon$, где ε - заданная малая величина.

Может показаться, что неявные многошаговые методы должны уступать явным по быстродействию, поскольку в неявных методах приходится решать уравнение для определения величины y_{i+1} , а в явных методах она определяется сразу. Это действительно так, если сравнивать быстродействие на одном шаге. При интегрировании на промежутке, как правило, неявные методы позволяют проводить вычисления с крупным шагом, так что можно добиться значительной экономии числа шагов. В целом же неявный метод существенную экономию машинного времени по сравнению с явным методом того же порядка точности.

Метод Адамса-Моултона легко переносится на нормальные системы дифференциальных уравнений вида

$$y'_k(x) = f_k(x, y_1, \dots, y_n), \quad 1 \leq k \leq n,$$

которые для краткости удобнее записывать в векторной форме

$$Y' = F(x, Y), \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad F = (f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Для получения расчетных формул метода Адамса-Моултона достаточно в формулах (10) заменить y и $f(x, y)$ соответственно на Y и $F(x, Y)$.

Решим пример 3 методом Адамса-Моултона. Результаты представлены на рис. 12-14.

$$x0 := 0 \quad xk := 2 \quad eps := 0.0000001 \quad n := 10 \quad f(x, y) := \begin{bmatrix} -y_1 + \sin(x \cdot y_2) \\ (y_0)^2 \\ -y_2 - y_0 \end{bmatrix} \quad y0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 12. Фрагмент рабочего документа МАТНСАД – решение примера 3 методом Адамса-Моултона (задание исходных данных)

```

AdamsMoulton(x0, zk, n, y0) :=
  x0 ← x0
  y0 ← y0
  h ←  $\frac{zk - x0}{n}$ 
  for i ∈ 0..2
    xi+1 ← xi + h
    k1i ← h · f(xi, yi)
    k2i ← h · f(xi +  $\frac{h}{2}$ , yi +  $\frac{k1i}{2}$ )
    k3i ← h · f(xi +  $\frac{h}{2}$ , yi +  $\frac{k2i}{2}$ )
    k4i ← h · f(xi + h, yi + k3i)
    yi+1 ← yi +  $\frac{1}{6} \cdot (k1i + 2 \cdot k2i + 2 \cdot k3i + k4i)$ 
  for i ∈ 3..n-1
    xi+1 ← xi + h
    k1i ← h · f(xi, yi)
    k2i ← h · f(xi-1, yi-1)
    k3i ← h · f(xi-2, yi-2)
    k4i ← h · f(xi-3, yi-3)
    yi+1 ← yi +  $\frac{1}{24} \cdot (55 \cdot k1i - 59 \cdot k2i + 37 \cdot k3i - 9 \cdot k4i)$ 
  for i ∈ 0..n-1
    y1i ← yi
  for i ∈ 2..n-1
    for m ∈ 0..10
      xi+1 ← xi + h
      k1i ← h · f(xi+1, yi+1)
      k2i ← h · f(xi, yi)
      k3i ← h · f(xi-1, yi-1)
      k4i ← h · f(xi-2, yi-2)
      y1i+1 ← yi +  $\frac{1}{24} \cdot (9 \cdot k1i + 19 \cdot k2i - 5 \cdot k3i + k4i)$ 
      break if |y1i+1 - yi+1| < eps
    otherwise
      yi+1 ← y1i+1
      m ← m + 1
  Y<0> ← x
  Y<1> ← y1
  Y

```

Рис. 13. Фрагмент рабочего документа MATHCAD- решение примера 3 с функцией, возвращающей решение дифференциального уравнения методом Адамса-Моултона

AM := AdamsMoulton(x0, xk, n, y0)

AM_{j,0} = (AM_{j,1})₀ = (AM_{j,1})₁ = (AM_{j,1})₂ =

0	1	0	1
0.2	0.995	0.199	0.638
0.4	0.964	0.393	0.344
0.6	0.889	0.566	0.113
0.8	0.764	0.704	-0.058
1	0.591	0.798	-0.17
1.2	0.381	0.846	-0.227
1.4	0.15	0.861	-0.234
1.6	-0.087	0.862	-0.196
1.8	-0.314	0.871	-0.124
2	-0.519	0.907	-0.025

x1(j) := AM_{j,0} y1(j) := (AM_{j,1})₀ y2(j) := (AM_{j,1})₁ y3(j) := (AM_{j,1})₂

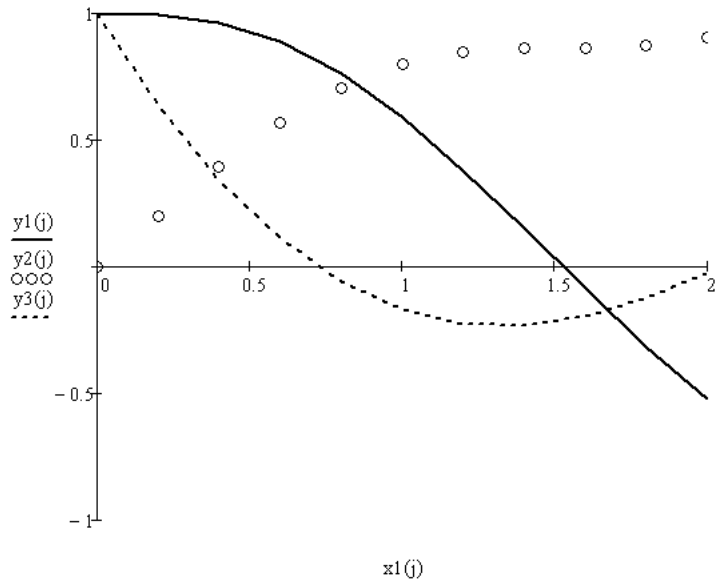


Рис. 14. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – числовое и графическое решение примера 3 методом Адамса-Моултона

Как видим результаты вычислений методом Адамса-Моултона совпали с решением методом Рунге-Кутты. Однако, для достижения заданной точности методом Адамса-Моултона достаточно было выбрать в четыре раза больший шаг, чем по методу Рунге-Кутты, что приводит к экономии вычислений и уменьшению ошибки округления.

Задание 5. Методом Адамса-Моултона на отрезке $[x_0, x_k]$ с точностью $eps = 0,000001$ решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, y_3), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, y_3), \\ y_3' = f_3(x, y_1, y_2, y_3), \end{cases} \begin{cases} y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2(x_0) = y_{20}, \\ y_3(x_0) = y_{30} \end{cases}$$

Построить график решения. Исходные данные взять из таблицы 3. Сравнить полученное решение с решением по методу Рунге-Кутты (см. задание 3).

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА (ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА)

В краевой задаче требуется найти решение обыкновенного дифференциального уравнения с дополнительными условиями, заданными при нескольких различных значениях независимой переменной.

Примером краевой задачи является двухточечная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (13)$$

с граничными условиями, заданными на концах отрезка $[x_0, x_k]$

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y(x_k) &= y_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Следует найти такое решение $y(x)$ на этом отрезке, которое принимает на концах отрезка значения y_0, y_1 . Если функция $f(x, y, y')$ линейна по аргументам y, y' , то задача (13), (14) - линейная краевая задача, в противном случае - нелинейная.

Кроме граничных условий (14) называемых граничными условиями первого рода, используются еще условия на производные от решения на концах - граничные условия второго рода:

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= y_0 \\ y'(x_k) &= y_1 \end{aligned} \quad (15)$$

или линейная комбинация решений и производных - граничные условия третьего рода:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \cdot y(x_0) + \beta_0 \cdot y'(x_0) &= \gamma_0 \\ \alpha_1 \cdot y(x_k) + \beta_1 \cdot y'(x_k) &= \gamma_1. \end{aligned} \quad (16)$$

где $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ - такие числа, что $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$.

Можно на разных концах отрезка использовать условия различных типов.

МЕТОД СТРЕЛБЫ

Суть метода заключена в многократном решении задачи Коши для приближенного нахождения решения краевой задачи.

Пусть надо решить краевую задачу (13), (14) на отрезке $[x_0, x_k]$. Вместо исходной задачи формулируется задача Коши с уравнением (13) и с начальными условиями

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_k) &= \theta \end{aligned} \quad (17)$$

где θ - некоторое значение тангенса угла наклона касательной к решению в точке $x = x_0$.

Положим сначала некоторое начальное значение параметру $\theta = \theta_0$, после чего решим каким либо методом задачу Коши (13), (17). Пусть $y = y_0(x, y_0, \theta_0)$ решение этой задачи на интервале $[x_0, x_k]$, тогда сравнивая значение функции $y_0(x_k, y_0, \theta_0)$ со значением y_1 в правом конце отрезка можно получить информацию для корректировки угла наклона касательной к решению в левом конце отрезка. Решая задачу для нового значения $\theta = \theta_1$, получим другое решение со значением $y_1(x_k, y_0, \theta_1)$ на правом конце. Таким образом, значение решения на правом конце $y(x_k, y_0, \theta)$ будет являться функцией одной переменной θ . Задачу можно сформулировать таким образом: требуется найти такое значение переменной θ^* , чтобы решение $y(x_k, y_0, \theta^*)$ в правом конце отрезка совпало со значением y_1 из (14). Другими словами решение исходной задачи эквивалентно нахождению корня уравнения

$$\Phi(\theta) = 0, \quad (18)$$

где $\Phi(\theta) = y(x_k, y_0, \theta) - y_1$.

Уравнение (18) является «алгоритмическим» уравнением, так как левая часть его задается с помощью алгоритма численного решения соответствующей задачи Коши. Но методы решения уравнения (18) аналогичны методам решения нелинейных уравнений. Следует заметить, так как невозможно вычислить производную функции $\Phi(\theta)$, то вместо метода Ньютона следует использовать метод секущих, в котором производная от функции заменена ее разностным аналогом. Данный разностный аналог легко вычисляется по двум приближениям, например θ_j и θ_{j+1} . Следующее значение искомого корня определяется по соотношению

$$\theta_{j+2} = \theta_{j+1} - \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Phi(\theta_{j+1}) - \Phi(\theta_j)} \Phi(\theta_{j+1}). \quad (19)$$

Итерации по формуле (19) выполняются до удовлетворения заданной точности.

Итак, если дана краевая задача, например, в вышеприведенной формулировке, то в методе стрельбы она заменяется задачей Коши для того же уравнения (14) но с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = k = \operatorname{tg} \theta. \quad (20)$$

Здесь $y(x_0)$ – точка, которая является началом кривой решения $y(x)$ дифференциального уравнения, θ – угол наклона касательной к этой кривой в начальной точке.

Считая решение задачи Коши зависящим от начального условия $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \operatorname{tg} \theta$, будем подбирать такое значение θ , при кото-

ром кривая решения $y(x)$ в точке x_k даст совпадающий с (13) результат $y(x_k) = B$. Если это условие будет выполнено, то решение задачи Коши совпадет с решением краевой задачи.

Применительно к описанному подходу название "метод стрельбы" вполне оправдано, поскольку в нем производится как бы "пристрелка" по углу наклона кривой $y(x)$ в начальной точке.

Чтобы сократить количество попыток при поиске решения $y(x)$, применяют различные стратегии подбора параметра θ . Например, при использовании метода половинного деления действуют следующим образом. Вначале выполняют два пробных расчета при значениях параметра θ равных θ_1 и θ_2 . Эти значения выбирают таким образом, чтобы при $\theta = \theta_1$ решение давало в точке $x = x_k$ "перелет", то есть $y(x_k) > y_1$, а при $\theta = \theta_2$ – "недолет", то есть $y(x_k) < y_1$.

Далее, используя в начальном условии (20) значение $\theta_3 = (\theta_1 + \theta_2)/2$, вновь численно решают задачу Коши. Из трех полученных решений отбрасывают то, которое дает в точке

$x = x_k$ наибольшее отклонение от y_1 . Затем от двух оставшихся значений параметра θ находят среднее θ_4 и вновь выполняют с этим значением расчет.

Повторение описанного процесса прекращают, когда разность двух последовательно найденных значений θ станет меньше некоторого заданного малого числа или достаточно малым будет отклонение $y(x_k)$ от y_1 . Подобный алгоритм может быть построен и с использованием метода Ньютона.

Пример 5. Методом стрельбы на отрезке $[0,1]$ с точностью $eps = 0,0001$ решить краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = e^x + \sin(y), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

Построить график решения.

Результаты решения в математическом пакете MATHCAD представлены на рис. 15-18.

x_0 и x_k - начальное и конечное значение отрезка интегрирования

a - значение y в точке x_0

b_k - значение y в точке x_k

b_1 и b_2 - два пристрелочных значений

n - число точек интегрирования

eps - погрешность вычислений

$f(x, y)$ - вектор_определяющий_правую_часть_уравнения

$$\begin{aligned} x_0 &:= 0 & x_k &:= 1 & eps &:= 0.0001 & n &:= 10 & f(x, y) &:= \begin{pmatrix} y_1 \\ e^x + \sin(y_0) \end{pmatrix} \\ a &:= 1 & b_k &:= 2 & b_1 &:= 1 & b_2 &:= 0.8 \end{aligned}$$

Рис. 15. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 5 методом стрельбы (задание исходных данных)

```

RK(x0, xk, n, a, b1) :=
  x0 ← x0
  a ← a
  b1 ← b1
  y0 ←  $\begin{pmatrix} a \\ b1 \end{pmatrix}$ 
  h ←  $\frac{xk - x0}{n}$ 
  for i ∈ 0..n-1
    xi+1 ← xi + h
    k1i ← h · f(xi, yi)
    k2i ← h · f(xi +  $\frac{h}{2}$ , yi +  $\frac{k1_i}{2}$ )
    k3i ← h · f(xi +  $\frac{h}{2}$ , yi +  $\frac{k2_i}{2}$ )
    k4i ← h · f(xi + h, yi + k3i)
    yi+1 ← yi +  $\frac{1}{6} \cdot (k1_i + 2 \cdot k2_i + 2 \cdot k3_i + k4_i)$ 
  Y<0> ← x
  Y<1> ← y
  Y

```

Рис. 16. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 5 методом стрельбы (функция, возвращающая решение исходного уравнения методом Рунге-Кутты)

```

Firing(x0,xk,n,b1,b2) :=
|
|  θ ← ( b1 )
|      ( b2 )
|
|  F ← [ (RK(x0,xk,n,a,b1)n,1)0 ]
|      [ (RK(x0,xk,n,a,b2)n,1)0 ]
|
|  for m ∈ 0..10
|  |
|  |  θm+2 ← θm+1 - (θm+1 - θm) / (Fm+1 - Fm) · (Fm+1 - bk)
|  |
|  |  break if |Fm+1 - bk| < eps
|  |
|  |  otherwise
|  |  |
|  |  |  Fm+2 ← (RK(x0,xk,n,a,θm+2)n,1)0
|  |  |
|  |  |  for j ∈ 0..n
|  |  |  |
|  |  |  |  xj ← RK(x0,xk,n,a,θm+2)j,0
|  |  |  |  yj ← (RK(x0,xk,n,a,θm+2)j,1)0
|  |  |
|  |  |
|  |  Y1<0> ← x
|  |  Y1<1> ← y
|  |  Y1

```

Рис. 17. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 5 методом стрельбы (функция, возвращающая решение краевой задачи)

$j := 0..n$ $x_j := \text{Firing}(x_0, x_k, n, b_1, b_2)_j, 0$ $y_j := \text{Firing}(x_0, x_k, n, b_1, b_2)_j, 1$

$x_j =$	$y_j =$
0	1
0.1	0.993
0.2	1.006
0.3	1.039
0.4	1.095
0.5	1.174
0.6	1.279
0.7	1.412
0.8	1.575
0.9	1.77
1	2

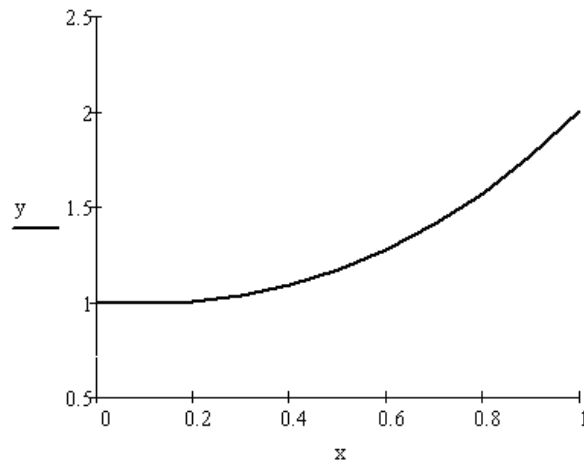


Рис. 18. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 5 методом стрельбы (числовое и графическое решение краевой задачи)

Задание 6. Методом стрельбы на отрезке $[x_0, x_k]$ с точностью $eps = 0,001$ решить краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка. Построить график решения.

Варианты заданий представлены ниже.

Вариант 1.

$$y''(x) + 2 \cdot x \cdot \sin(y(x)) \cdot y'(x) + \ln(x+1) \cdot y(x) = x^3 \cdot \cos(y(x)),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_k = 3.$$

Вариант 2.

$$y''(x) + x^{2 \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right)} \cdot y'(x) + \sin(y(x)) \cdot y(x) = \lg\left(\frac{x-1}{x+3}\right),$$

$$y(x_0) = 4, \quad y(x_k) = -1, \quad x_0 = 4, \quad x_k = 10.$$

Вариант 3.

$$y''(x) + \sqrt{x^4 + 2 \cdot x + 1} \cdot y(x) = \sin^2(2 \cdot y(x)),$$

$$y(x_0) = -1, \quad y(x_k) = -3, \quad y''(x_0) = 3 \quad x_0 = 1, \quad x_k = 5.$$

Вариант 4.

$$y''(x) + 2 \cdot x \cdot \sin(y(x)) \cdot y'(x) + \ln(x+1) \cdot y(x) = x^3 \cdot \cos(y(x)),$$

$$y(x_0) = 2,5, \quad y(x_k) = 1,5, \quad x_0 = -3, \quad x_k = 2.$$

Вариант 5.

$$y''(x) + \frac{6 \cdot x}{\sin(x)} \cdot y'(x) + \operatorname{tg}(x) \cdot y(x) = x \cdot \cos(y(x)),$$

$$y(x_0) = 4, \quad y(x_k) = 2, \quad x_0 = -1,5, \quad x_k = 1,5.$$

Вариант 6.

$$y''(x) + \operatorname{Arsh}(x) \cdot y'(x) + 3 \cdot x^2 \cdot y(x) = \cos\left(\frac{x}{5}\right) + \sin(5 \cdot y(x)),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 1, \quad x_0 = -3, \quad x_k = 4.$$

Вариант 7.

$$y''(x) + e^x \cdot \cos(y(x)) \cdot y'(x) + [\lg(x+6) + \sin(y(x))] \cdot y(x) =$$

$$= x^2 + \cos(y(x)),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 0,5, \quad x_0 = 0, \quad x_k = 3.$$

Вариант 8.

$$y''(x) + \operatorname{ch}(x) \cdot y'(x) + [\ln(|\sin(x+2)|) + \sin(y(x))] \cdot y(x) =$$

$$= x^2 \cos(y(x)),$$

$$y(x_0) = 1, \quad y(x_k) = 1, \quad x_0 = -4, \quad x_k = 0.$$

Вариант 9.

$$y''(x) + \left[\frac{2}{x} + y(x) \right] \cdot y'(x) + \sin(x) \cdot y^2(x) = \sqrt{x^2 + 4} + y(x),$$

$$y(x_0) = 4, \quad y(x_k) = 2, \quad x_0 = 4, \quad x_k = 6.$$

Вариант 10.

$$y''(x) + x^4 \cdot y'(x) + 2 \cdot x^3 \cdot \sin(y(x) + 1) \cdot y(x) = e^{x \cdot \cos(y(x))},$$

$$y(x_0) = 2, \quad y(x_k) = 3, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 3.$$

Вариант 11.

$$y''(x) + \left[6 \cdot x^3 + \cos(y(x))\right] \cdot y'(x) + \operatorname{cth}\left(\frac{1}{x+1}\right) \cdot y(x) =$$

$$= \ln(x-2) + \sin(y(x)),$$

$$y(x_0) = 3, \quad y(x_k) = 4, \quad x_0 = 15, \quad x_k = 2,5.$$

Вариант 12.

$$y''(x) + \cos\left(y(x) + \frac{4}{x+1}\right) y'(x) + e^{\cos(y(x))} \cdot y(x) = \frac{x^2}{x+1} + \sin^2(y(x)),$$

$$y(x_0) = 8, \quad y(x_k) = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_k = 8.$$

Вариант 13.

$$y''(x) + x \cdot \cos(x + y(x)) \cdot y'(x) + e^{\sin(4-x+y(x))} \cdot y(x) =$$

$$= \sqrt{x^3 + 2 \cdot x^2 + 1} + \sin^2(y(x)),$$

$$y(x_0) = 2, \quad y(x_k) = 2, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 3.$$

Вариант 14.

$$y''(x) + \left[4 \cdot x + \cos^3(y(x))\right] \cdot y'(x) + \left[1 + \sqrt{|\sin(x + y(x)) + 3|}\right] \cdot y(x) =$$

$$= \frac{1}{x+5} \cdot \sin(y(x)),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 0, \quad x_0 = -2, \quad x_k = 2.$$

Вариант 15.

$$y''(x) + \ln(x+2) \cdot y'(x) + x^2 \cdot \cos(y(x) + 2) \cdot y(x) =$$

$$= \sqrt[3]{x^2 + 2} + \sin^3(y(x)),$$

$$y(x_0) = 3, \quad y(x_k) = 2, \quad x_0 = 8, \quad x_k = 10.$$

Вариант 16.

$$\begin{aligned}
& y''(x) + [3 \cdot x + \sin(y(x))] \cdot y'(x) + x^3 \cdot \lg(3 \cdot x) \cdot y(x) = \\
& = 3 \cdot e^{3 \cdot x} + \cos(3 \cdot y(x)), \\
& y(x_0) = 1, \quad y(x_k) = 6, \quad x_0 = 0,5, \quad x_k = 3,5.
\end{aligned}$$

Вариант 17.

$$\begin{aligned}
& y''(x) + \frac{x+1}{y(x)+3} \cdot y'(x) + [\operatorname{tg}(x) + \cos(y(x))] \cdot y(x) = \\
& = e^x + \cos^3[y(x) + 1], \\
& y(x_0) = 3, \quad y(x_k) = 3, \quad x_0 = -1,5, \quad x_k = 1,5.
\end{aligned}$$

Вариант 18.

$$\begin{aligned}
& y''(x) + y'(x) + [\cos(y(x) + \cos(x))] \cdot y(x) = x^2 \cdot e^x + \sin(2 \cdot y(x)), \\
& y(x_0) = -20, \quad y(x_k) = 200, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 4.
\end{aligned}$$

Вариант 19.

$$\begin{aligned}
& y''(x) + \sqrt{x^2 + 4 \cdot x + 7} \sin[4 \cdot y(x)] \cdot y'(x) + \left[e^{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \cos[y(x)] \right] \cdot y(x) = \\
& = \frac{x^2 + 1}{y(x) - 3}, \\
& y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 0, \quad x_0 = 4, \quad x_k = 8.
\end{aligned}$$

Вариант 20.

$$\begin{aligned}
& y''(x) + \frac{\lg(x)}{y(x)+1} \cdot y'(x) + x^3 \cdot \cos[y(x)] \cdot y(x) = x^{\sin[x+y(x)]}, \\
& y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 5.
\end{aligned}$$

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим двухточечную краевую задачу для линейного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке $[x_0, x_k]$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \quad (21)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_k) = y_1. \quad (22)$$

Введем разностную сетку на отрезке $[x_0, x_k]$ $i = 0, 1, \dots, n$, $h = |x_k - x_0|/n$. Решение задачи (21), (22) будем искать в виде сеточной функции $y^{(h)} = \{y_i, i = 0, 1, \dots, n\}$, предлагая, что решение существует и единственно. Введем разностную аппроксимацию производных следующим образом:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2),$$
$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2), \quad (23)$$

Подставляя аппроксимации производных из (23) в (21), (22) получим систему уравнений для нахождения y_i :

$$\begin{cases} y_0 = y_{x_0} \\ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i = f(x_i), \\ y_n = y_{x_k} \end{cases} \quad (24) \quad i = 1, \dots, n-1$$

Приводя подобные и учитывая, что при задании граничных условий первого рода два неизвестных y_0, y_n уже фактически определены, получим систему линейных алгебраических уравнений с трех диагональной матрицей коэффициентов

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-2 + h^2 q(x_1)\right)y_1 + \left(1 + \frac{p(x_1)h}{2}\right)y_2 = h^2 f(x_1) - \left(1 - \frac{p_1(x_1)h}{2}\right)y_{x_0} \\ \left(1 - \frac{p(x_k)h}{2}\right)y_{i-1} + \left(-2 + h^2 q(x_k)\right)y_i + \\ + \left(1 + \frac{p(x_k)h}{2}\right)y_{i+1} = h^2 f(x_k) \quad , i = 2, \dots, n-2 \\ \left(1 - \frac{p(x_{n-1})h}{2}\right)y_{n-1} + \left(-2 + h^2 q(x_{n-1})\right)y_{n-1} = \\ = h^2 f(x_{n-1}) - \left(1 + \frac{p(x_{n-1})h}{2}\right)y_{x_k} \end{array} \right. \quad (25)$$

Для системы (25) при достаточно малых шагах сетки h и $q(x_k) < 0$ выполнены условия преобладания диагональных элементов

$$\left| -2 + h^2 q(x_k) \right| > \left| 1 - \frac{p(x_k)h}{2} \right| + \left| 1 + \frac{p(x_k)h}{2} \right|,$$

что гарантирует устойчивость счета и корректность применения метода прогонки для решения этой системы.

В случае использования граничных условий второго и третьего рода аппроксимация производных проводится с помощью односторонних разностей первого и второго порядков.

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h); \quad (26)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_n = \frac{y_n - u_{n-1}}{h} + O(h)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2); \quad (27)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_n = \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h} + O(h^2)$$

В случае использования формул (26) линейная алгебраическая система аппроксимирует дифференциальную задачу в целом только с первым порядком (из-за аппроксимации в граничных точках), однако сохраняется трех диагональная структура матрицы коэффициентов. В случае использования формул (27) второй порядок аппроксимации сохраняется везде, но матрица линейной системы не трех диагональная.

Алгоритм метода прогонки состоит из нескольких шагов. Предварительно определяют коэффициенты уравнений вида (разностная схема)

$$A_i y_{i-1} + C_i y_i + B_i y_{i+1} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (28)$$

где $A_i = \frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}$, $B_i = \frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}$, $C_i = q_i - \frac{2}{h^2}$, $F_i = f_i$.

Затем находят прогоночные коэффициенты по формулам (прямая прогонка):

$$v_i = \frac{-B_i}{C_i + A_i v_{i-1}}, \quad \mu_i = \frac{F_i - A_i \mu_{i-1}}{C_i + A_i v_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (29)$$

$$v_0 = \frac{\frac{\beta_0}{2h} \left(3 - \frac{C_1}{B_1} \right)}{\alpha_0 + \frac{\beta_0}{h} \left(2 + \frac{A_1}{2B_1} \right)}, \quad \mu_0 = \frac{\gamma_0 + \frac{\beta_0 F_1}{2h B_1}}{\alpha_0 + \frac{\beta_0}{h} \left(2 + \frac{A_1}{2B_1} \right)},$$

Значения прогоночных коэффициентов на правой границе определяются из краевых условий по формулам

$$v_n = \frac{\frac{\beta_1}{h} \left(\frac{C_{n-1}}{2A_{n-1}} + 2 \right)}{\alpha_1 + \frac{\beta_1}{2h} \left(3 - \frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} \right)}, \quad \mu_n = \frac{\gamma_1 - \frac{\beta_1 F_{n-1}}{2h A_{n-1}}}{\alpha_1 + \frac{\beta_1}{2h} \left(3 - \frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} \right)} \quad (30)$$

После чего сеточная функция y_n на правой границе определяется из выражения

$$y_n = \frac{\mu_n + v_n \mu_{n-1}}{1 - v_n v_{n-1}} \quad (31)$$

Наконец, обратной проголкой находят все значения сеточной функции

$$y_i = v_i y_{i+1} + \mu_i, \quad i = n-1, n-2, \dots, 0. \quad (32)$$

Таким образом, метод прогонки позволяет найти точное решение системы (25), значит, погрешность решения краевой задачи (21) – (22) определяется погрешностью разностной аппроксимации

исходной задачи системой (25) и равна $O(h)$. Так как $h = (x_k - x_0)/n$, то, выбирая n достаточно большим, можно добиться уменьшения погрешности ценой увеличения объема вычислений при решении системы (25).

При практической оценке погрешности найденного решения обычно используют двойной пересчет и правило Рунге. Если $y(x_i)$ - точное значение решения в узле x_i , а y_i и \bar{y}_i - приближенные значения в том же узле, полученные соответственно с шагом h и $h/2$, то оценка погрешности решения y_i определяется формулой

$$|\bar{y}_i - y(x_i)| \cong |y_i - \bar{y}_i|/3.$$

Алгоритм метода прогонки реализован при решении примеров 6 и 7..

Пример 6. Методом прогонки на отрезке $[0,8]$ с точностью $eps = 0,001$ решить краевую задачу с граничными условиями первого рода для дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x) + tg(x) \cdot y'(x) + \cos^2(x) \cdot y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(8) = 10.$$

Построить график решения. Сравнить полученное решение с точным решением

$$y(x) = \cos(\sin(x)) + C \cdot \sin(\sin(x)), \quad C = \frac{(10 - \cos(\sin(8)))}{\sin(\sin(8))} = 11,309.$$

Результаты решения представлены на рис. 19-21.

```

x0 := 0   xk := 8   α0 := 1   β0 := 0   γ0 := 1   α1 := 1   β1 := 0   γ1 := 10
p(x) := tan(x)   q(x) := cos(x)2   f(x) := 0   n := 80   eps := 0.001
Progonka(n) :=
  x0 ← x0
  h ← (xk - x0) / n
  for i ∈ 0..n-1
    xi+1 ← xi + h
    Ai ← 1 + h2 - p(xi) * (2 * h)
    Bi ← 1 + h2 + p(xi) * (2 * h)
    Ci ← q(xi) - 2 + h2
    Fi ← f(xi)
  r1 ← α0 + β0 + h * [2 + A1 + (2 * B1)]
  v0 ← [β0 + (2 * h) * (3 - C1 + B1)] + r1
  μ0 ← [γ0 + β0 + (2 * h) * F1 + B1] + r1
  for i ∈ 1..n-1
    vi ← -Bi / (Ci + Ai * vi-1)
    μi ← (Fi - Ai * μi-1) / (Ci + Ai * vi-1)
  r2 ← α1 + β1 + (2 * h) * (3 - Bn-1 + An-1)
  vn ← [β1 + h * [Cn-1 + (2 * An-1) + 2]] + r2
  μn ← [γ1 - β1 + (2 * h) * Fn-1 + An-1] + r2
  yn ← (μn + vn * μn-1) / (1 - vn * vn-1)
  for i ∈ n-1, n-2..0
    yi ← vi * yi+1 + μi
  R<0> ← x
  R<1> ← y
  R

```

Рис. 19. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 6 (задание исходных данных с функцией, возвращающей решение исходного уравнения методом прогонки)

```

Yrez := | eps ← eps
        | for m ∈ 0..100
        |   y1 ← Progonka(n)
        |   y2 ← Progonka(2n)
        |   for k ∈ 0..n
        |     rk ← max(|y1k,1 - y2k,1|)
        |     break if max(r) < eps
        |     n ← 2 · n otherwise
        |   (y2)
        |   (n)

```

$$x := 0, 0.5.. 8$$

$$CC := \frac{10 - \cos(\sin(8))}{\sin(\sin(8))} = 11.309$$

$$Y_{\text{точное}}(x) := \cos(\sin(x)) + CC \cdot \sin(\sin(x))$$

$$Y_{\text{rez1}} = 640$$

$$k := 0, \frac{Y_{\text{rez1}}}{8} .. (2Y_{\text{rez1}})_1$$

$$xx(k) := (Y_{\text{rez0}})_{k,0} \quad y(k) := (Y_{\text{rez0}})_{k,1}$$

x =	Y _{точное} (x) =	xx(k) =	y(k) =
0	1	0	1
0.5	6.104	0.5	5.52
1	9.099	1	8.922
1.5	10.043	1.5	10.053
2	9.538	2	9.442
2.5	7.198	2.5	6.742
3	2.581	3	1.683
3.5	-2.947	3.5	-4.112
4	-7.038	4	-8.217
4.5	-8.818	4.5	-9.922
5	-8.683	5	-9.796
5.5	-6.572	5.5	-7.76
6	-2.158	6	-3.301
6.5	3.391	6.5	2.554
7	7.699	7	7.308
7.5	9.711	7.5	9.649
8	10	8	10

Рис. 20. Фрагмент рабочего документа МАТНСАД – решение примера 6 методом прогонки(функция, уточняющая решение, числовое решение, сравнение с точным решением)

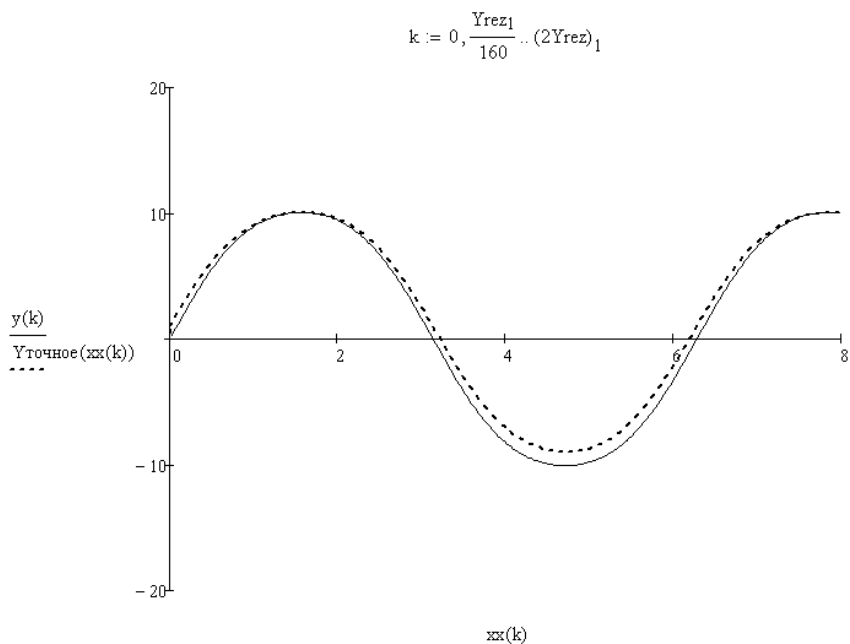


Рис. 21. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 6 методом прогонки (график решения, сравнение с точным решением)

Пример 7. Методом прогонки на отрезке $[0,10]$ с точностью $eps = 0,001$ решить краевую задачу с граничными условиями третьего рода для дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x) + \frac{1}{x+1} \cdot y'(x) + x^2 \cdot y(x) = x^2 \cdot \ln(x+1),$$

$$3y(0) + \frac{1}{2}y'(0) = 0.5, \quad -0.4y(10) - 2y'(10) = -1.141.$$

Построить график решения. Сравнить полученное решение с точным решением $y(x) = \ln(x+1)$.

Результаты решения представлены на рис. 22.

ORIGIN:= 1 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ $f(x) = x^2$ $f(x) = x^2 \cdot \ln(x+1)$ $\text{eps} := 0.001$ $N1 := 11$

$x0 := 0$ $xk := 10$ $\alpha0 := 3$ $\beta0 := 0.5$ $\gamma0 := 0.5$ $\alpha1 := -0.4$ $\beta1 := -2$ $\gamma1 := -1.141$

```

Progon(N1) :=
n ← N1
n ← n - 1
h ← (xk - x0) / n
r1 ← h^2
r2 ← h / 2
p1 ← (-β0) / (α0·h - β0)
q1 ← (-γ0·h·p1) / β0
x ← x0
for i ∈ 2..n
    i1 ← i - 1
    x ← x + h
    t ← 1 - f(x)·r2
    pi ← (t - 2) / (f(x)·r1 + t·p1 - 2)
    qi ← (f(x)·r1 - t·q1) · pi / (t - 2)
PN1 ← 0
qN1 ← (γ1·h + β1·qN) / (α1·h + β1 - β1·pN)
YN1 ← qN1
XN1 ← xk
for j ∈ 1..n
    i ← n - j + 1
    i1 ← i + 1
    Yi ← pi·Yi1 + qi
    Xi ← x0 + h·(i - 1)
    REZ(1) ← X
    REZ(2) ← Y
    REZ

```

```

Yrez :=
eps ← eps
for m ∈ 0..1000
    y1 ← (Progon(N1))
    y2 ← (Progon(2·N1 - 1))
    for k ∈ 1..N1
        rk ← max(|y1k,2 - y2k-1,2|)
    break if max(r) < eps
    N1 ← 2·N1 - 1 otherwise
    (y2)
    (N1)

```

$x := 0, 0.5..10$ $Yrez2 = 161$
 $Y_{\text{точное}}(x) := \ln(x+1)$ $x(j) := (Yrez1)_{j,1}$
 $j := 1, 41..2 \cdot Yrez2 - 1$ $y(j) := (Yrez1)_{j,2}$

$x(j)$	$y(j)$
0	$2.992 \cdot 10^{-3}$
1.25	0.812
2.5	1.252
3.75	1.558
5	1.792
6.25	1.981
7.5	2.14
8.75	2.277
10	2.398

Рис. 22. Рабочий документ MATHCAD – решение примера 7 методом прогонки

Анализируя полученные решения, видим в примере 7 полное совпадение результатов, полученных методом прогонки, с точным решением, однако в примере 6 результаты, полученные методом прогонки, не на всем отрезке интегрирования совпадают с точным решением. Это происходит из-за того, что точным решением в примере 7 является функция, довольно медленно меняющаяся на всем промежутке интегрирования. В примере 6 на участках медленного изменения функции решение методом прогонки дает полное совпадение с точным решением, на участках быстрого изменения функции решение методом прогонки отклоняется от точного решения. Максимальное отклонение составило 22 %. Уменьшение шага даже в 1000 раз не позволило уменьшить это отклонение. Значит к численному решению, полученному методом прогонки, в местах быстрого изменения решения следует подходить с осторожностью.

Задание 7. Методом прогонки на отрезке $[x_0, x_k]$ с точностью $eps = 0,001$ решить краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка. Построить график решения.

Варианты заданий представлены ниже.

Вариант 1.

$$y''(x) - x \cdot y'(x) + (2 \cdot x + 1) \cdot y(x) = 0.8 \cdot x^2,$$

$$y(x_0) - 0.5y'(x_0) = 1, \quad y'(x_k) = 2, \quad x_0 = 1, x_k = 3.$$

Вариант 2.

$$y''(x) - \frac{1}{4} \cdot \cos(x) \cdot y'(x) + \frac{2}{x} \cdot y(x) = x \cdot \sin(x),$$

$$1.5y(x_0) - y'(x_0) = 0.6, \quad 2y(x_k) = 0.3, \quad x_0 = 1, x_k = 4.$$

Вариант 3.

$$y''(x) - e^{-x^2} \cdot y'(x) + \cos(x) \cdot y(x) = x^2,$$

$$1.5y(x_0) + 1.94y'(x_0) = 2.31, \quad y(x_k) + y'(x_k) = 0, \quad x_0 = -1, x_k = 4.$$

Вариант 4.

$$y''(x) - e^{\sqrt{x}} \cdot y'(x) + \frac{x}{3} \cdot y(x) = x^3,$$

$$y(x_0) - 3.6y'(x_0) = 1, \quad 0.43y(x_k) - 1.2y'(x_k) = 4, \quad x_0 = 0.2, \quad x_k = 6.2.$$

Вариант 5.

$$y''(x) - x^2 \cdot y'(x) - \frac{0.5}{x} \cdot y(x) = 2,$$

$$2y(x_0) + 3y'(x_0) = 4, \quad -0.2y'(x_k) = 3.9, \quad x_0 = 2, \quad x_k = 5.$$

Вариант 6.

$$y''(x) + x^3 \cdot y'(x) + \ln(x) \cdot y(x) = 2 \cdot x + \sin(x),$$

$$y(x_0) = 2, \quad y(x_k) + y'(x_k) = 2, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 6.$$

Вариант 7.

$$y''(x) + e^x \cdot y'(x) + \frac{x}{2} \cdot y(x) = x^2,$$

$$y(x_0) - 1.2y'(x_0) = 0, \quad 2y(x_k) - 2.5y'(x_k) = -4, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 4.$$

Вариант 8.

$$y''(x) + 2 \cdot \sin(x) \cdot y'(x) - 1.5 \cdot x \cdot y(x) = \frac{2}{x},$$

$$y'(x_0) = 1, \quad y(x_k) + 2y'(x_k) = 1, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 5.$$

Вариант 9.

$$y''(x) + x \cdot \cos(x) \cdot y'(x) + \frac{2 \cdot \ln(x)}{x} \cdot y(x) = x \cdot \sin^2(x),$$

$$2y(x_0) - 2y'(x_0) = 1, \quad 3y(x_k) = 1, \quad x_0 = 2, \quad x_k = 6.$$

Вариант 10.

$$y''(x) + \cos^2(x) \cdot y'(x) + \frac{3}{x+4} \cdot y(x) = -x,$$

$$-y(x_0) + 2y'(x_0) = 3, \quad -2y(x_k) + y'(x_k) = -4, \quad x_0 = -2, \quad x_k = 2.$$

Вариант 11.

$$y''(x) - x \cdot y'(x) + 2 \cdot y(x) = x + 1,$$

$$y(x_0) - 0.5y'(x_0) = 2, \quad y(x_k) = 1, \quad x_0 = 0, x_k = 7.$$

Вариант 12.

$$y''(x) + 2 \cdot x^2 \cdot y'(x) + \frac{1}{x} \cdot y(x) = x,$$

$$2y(x_0) - y'(x_0) = 1, \quad y(x_k) = 3, \quad x_0 = 1, x_k = 8.$$

Вариант 13.

$$y''(x) + (x^3 + 2 \cdot x) \cdot y'(x) - 2 \cdot x \cdot y(x) = e^x, \quad x_0 = -1, x_k = 4,$$

$$-y(x_0) - 3.5y'(x_0) = 4.6, \quad 1.6y(x_k) + 12.1y'(x_k) = 2.7.$$

Вариант 14.

$$y''(x) + e^{-x} \cdot y'(x) + 3 \cdot x \cdot y(x) = \sin^3(x),$$

$$1.1y(x_0) + 2.5y'(x_0) = -1, \quad 2.6y(x_k) + y'(x_k) = 7.4, \quad x_0 = 1, x_k = 8.$$

Вариант 15.

$$y''(x) - \frac{1}{2} \cdot y'(x) + \frac{3}{x+6} \cdot y(x) = 2 \cdot x^2,$$

$$y(x_0) + 2y'(x_0) = 0.6, \quad y(x_k) = 1, \quad x_0 = -3, x_k = 3.$$

Вариант 16.

$$y''(x) + 2 \cdot x^2 \cdot y'(x) + e^{-2x} \cdot y(x) = x,$$

$$2y(x_0) - y'(x_0) = 11, \quad y(x_k) + y'(x_k) = 2, \quad x_0 = 1, x_k = 4.$$

Вариант 17.

$$y''(x) + \frac{2}{x} \cdot y'(x) + e^{-3x} \cdot y(x) = x + 1,$$

$$y'(x_0) = 2, \quad y(x_k) - y'(x_k) = 3, \quad x_0 = 1, x_k = 3.$$

Вариант 18.

$$y''(x) + \sin(x) \cdot y'(x) + \cos^2(x) \cdot y(x) = 2 \cdot x^2,$$

$$1.2y(x_0) + 3.1y'(x_0) = 3.9, \quad -y(x_k) + 3.3y'(x_k) = 4.2, \quad x_0 = -3, x_k = 1.$$

Вариант 19.

$$y''(x) + \frac{1}{x} \cdot y'(x) + 2 \cdot \ln(x) \cdot y(x) = x,$$

$$y(x_0) = 0.5, \quad 2y(x_k) + 3y'(x_k) = 1.2, \quad x_0 = 1, x_k = 5.$$

Вариант 20.

$$y''(x) + e^x \cdot \cos(x) \cdot y'(x) + \frac{4}{x} \cdot y(x) = x \cdot \sin(x),$$

$$2.1y(x_0) - 1.4y'(x_0) = 0.9, \quad 1.7y(x_k) + 0.6y'(x_k) = 0.1, \quad x_0 = 1, x_k = 4.$$

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бахвалов Н.С.* Численные методы в задачах и упражнениях. / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. - Издательство: Бинوم. Лаборатория знаний, 2010, 240 с.
2. *Галанин М.П.* Методы численного анализа математических моделей. / М.П. Галанин, Е.Б. Савенкова. - М: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, 592 с.
3. *Зарубин В.С.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. / В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин -М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, 512 с.
4. *Калиткин Н.Н.* Численные методы./ Н.Н. Калиткин.- Издательство: БХВ-Петербург, 2011, 592 с.
5. *Макаров Е.Г.* Инженерные расчеты в Mathcad: Учебный курс. / Е.Г. Макаров - СПб.: Питер, 2011, 400 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.....	4
ЗАДАЧА КОШИ.....	4
ОДНОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ.....	5
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА.....	5
МЕТОД РУНГЕ-КУТТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА.....	16
МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ.....	24
МЕТОД АДАМСА-БАШФОРТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА... ..	25
МЕТОД АДАМСА-МОУЛТОНА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА... ..	33
КРАЕВАЯ ЗАДАЧА (ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА).....	38
МЕТОД СТРЕЛЬБЫ.....	39
КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ.....	49
РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК ..	61