

НАЦИОНАЛЬНЫЙ МИНЕРАЛЬНО-СЫРЬЕВОЙ УНИВЕРСИТЕТ «ГОРНЫЙ»
Кафедра Метрологии и Управления качеством

Методическое пособие по расчету 1РГР

Оценка связи между качественными признаками. Метод χ^2 ("хи-квадрат")

Иногда в процессе проведения эксперимента возникает необходимость сравнения не абсолютных средних значений величин, а частотных, например процентных, распределений результатов для того, чтобы выяснить, связаны они друг с другом или, наоборот, независимы. Так бывает необходимо проверить:

- существуют ли достоверные различия между числом деталей, удовлетворяющих требованиям QMS, и числом этих же деталей, оценивающимися Отделом качества на хороший и отличный класс;
- между возрастом людей и их успехом или неудачей в выполнении заданий на производстве

В подобных случаях может помочь метод χ^2 -критерий (хи-квадрат).

Пример. Для экспериментального исследования была взята выборка из 100 штампованных компонентов завода «Северсталь-Колпино» и к аудиторской проверке рабочим смен были даны указания работать по методике SMED - Single minute exchange of die, введены нормы 5S. До эксперимента 30 деталей в Отделе качества оценивали на «удовлетворительно», 30 – на «хорошо», а остальные 40 – на «отлично». После эксперимента ситуация изменилась: теперь на «удовлетворительно» оценивают только 10 деталей, на «хорошо» – 45 деталей и на «отлично» – 45.

Вопрос: Можно ли, опираясь на эти данные, утверждать, что формирующий эксперимент, направленный на улучшение качества, удался?

Для ответа на данный вопрос подсчитаем χ^2 - критерий по следующей формуле:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^c \frac{(V_i - P_i)^2}{P_i}$$

где P_i - частоты результатов наблюдения до эксперимента;

V_i - частоты результатов наблюдений, сделанных после эксперимента;

c - общее число групп, на которые разделились результаты наблюдений.

Воспользуемся приведенным примером, чтобы продемонстрировать, как работает χ^2 -критерий.

Сформулируем гипотезы:

Но – Распределения деталей по группам на «удовлетворительно», «хорошо» и «отлично» до и после формирующего эксперимента не отличаются между собой.

H1 – Распределения учащихся по группам деталей на «удовлетворительно», «хорошо» и «отлично» до и после формирующего эксперимента отличаются между собой.

В нашем примере P переменная принимает следующие значения: 30%, 30%, 40%, а переменная V – такие значения: 10%, 45%, 45%. Составим таблицу 1.

Таблица 1.

Промежуточные расчеты для критерия χ^2

| Группы Испытуемых | P_k | V_k | $(V_k - P_k)$ | $(V_k - P_k)^2$ |
|--------------------------------------|-------|-------|---------------|-----------------|
| 1. Успевающие на «удовлетворительно» | 30 | 10 | 20 | 400 |
| 2. Успевающие на «хорошо» | 30 | 45 | -15 | 225 |

| | | | | |
|----------------------------|----|----|----|----|
| 3. Успевающие на «отлично» | 40 | 45 | -5 | 25 |
|----------------------------|----|----|----|----|

Подставим полученные значения в формулу для χ^2 и определим его эмпирическую величину.

$$\chi^2_{\text{эмп.}} = \frac{400}{30} + \frac{225}{30} + \frac{25}{40} = 21,5$$

Теперь воспользуемся таблицей 2 Приложения, где для заданного числа степеней свободы $df = (c - 1)$ можно выяснить степень значимости полученных различий в распределении оценок до и после формирующего эксперимента.

В нашем случае было 3 группы деталей: оценивающиеся Отделом качества на «удовлетворительно», «хорошо» и «отлично», следовательно, число степеней свободы df будет равно 2 ($3 - 1 = 2$).

По таблице IV Приложения определяем критические значения χ^2 :

$$\chi^2_{\text{кр.}} = \begin{cases} 3,84 & (p \leq 0,05) \\ 10,86 & (p \leq 0,001) \end{cases}$$

$$\chi^2_{\text{эмп.}} < \chi^2_{\text{кр.}} \quad (p < 0,001)$$

Можно видеть, что полученное нами значение $\chi^2 = 21,5$ больше соответствующего табличного значения df ($c - 1 = 2$) степеней свободы, составляющего 13,82 при вероятности допустимой ошибки $p \leq 0,001$.

Ответ: Но отвергается. Принимается H_1 . Предположения о значимых изменениях, которые произошли в качестве деталей в результате введения новой SMED методики (Single minute exchange of die, 5S) подтвердились: качество деталей достоверно улучшилось ($p < 0,001$).

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА КРИТЕРИЯ « χ^2 »

1. Занести в таблицу частоты результатов наблюдений, сделанных до эксперимента - P_k (первый столбец).
2. Занести в таблицу частоты результатов наблюдений, сделанных после эксперимента - V_k (второй столбец).
3. Подсчитать разности между этими значениями по каждой строке таблицы ($V_k - P_k$), возвести их в квадрат $(V_k - P_k)^2$ и каждое разделить на P_k
4. Просуммировать результаты. Полученную сумму обозначить как χ^2 .
5. Определить число степеней свободы по формуле: $df = c - 1$, где c - количество разрядов признака (число групп, число наблюдений и т.д.).
6. Определить по таблице IV приложения критические значения для данного числа степеней свободы df .

Если $\chi^2_{\text{эмп.}}$ меньше критического значения, расхождения между распределениями статистически недостоверны.

Если $\chi^2_{\text{эмп.}}$ равно критическому значению или превышает его, расхождения между распределениями статистически достоверны.

| Вариант | Выборка | До введения SMED и 5S | | | После введения SMED и 5S | | |
|---------|---------|-----------------------|-----|-----|--------------------------|-----|-----|
| | | уд | хор | отл | уд | хор | отл |
| 1 | 100 | 20 | 30 | 50 | 10 | 30 | 60 |
| 2 | 200 | 50 | 110 | 40 | 60 | 50 | 90 |
| 3 | 90 | 50 | 10 | 30 | 30 | 20 | 40 |
| 4 | 130 | 10 | 40 | 80 | 30 | 20 | 80 |
| 5 | 180 | 90 | 5 | 85 | 30 | 50 | 100 |
| 6 | 120 | 70 | 25 | 25 | 50 | 30 | 40 |

Квантили χ^2 -распределения для уровней значимости $p < 0,05$ и $p < 0,01$ (по Суходольскому Г.В., 1998)

Различия можно считать значимыми на указанном в таблице уровне значимости если $\chi^2_{\text{эмп}}$ достигает соответствующего критического значения или превышает его.

| df | P | | df | p | | df | p | |
|-----------|------|------|-----------|------|------|-------------|------|------|
| | 0,05 | 0,01 | | 0,05 | 0,01 | | 0,05 | 0,01 |
| 1 | 3,84 | 6,64 | 31 | 45,0 | 52,2 | 72 | 92,8 | 103 |
| 2 | 5,99 | 9,21 | 32 | 46,2 | 53,5 | 74 | 95,1 | 105 |
| 3 | 7,82 | 11,3 | 33 | 47,4 | 54,8 | 76 | 97,4 | 108 |
| 4 | 9,49 | 13,3 | 34 | 48,6 | 56,1 | 78 | 99,6 | 110 |
| 5 | 11,1 | 15,1 | 35 | 49,8 | 57,3 | 80 | 102 | 112 |
| 6 | 12,6 | 16,8 | 36 | 51,0 | 58,6 | 82 | 104 | 115 |
| 7 | 14,1 | 18,5 | 37 | 52,2 | 59,9 | 84 | 106 | 117 |
| 8 | 15,5 | 20,1 | 38 | 53,4 | 61,2 | 86 | 109 | 119 |
| 9 | 16,9 | 21,7 | 39 | 54,6 | 62,4 | 88 | 111 | 122 |
| 10 | 18,3 | 23,2 | 40 | 55,8 | 63,7 | 90 | 113 | 124 |
| 11 | 19,7 | 24,7 | 41 | 56,9 | 65,0 | 92 | 115 | 126 |
| 12 | 21,0 | 26,2 | 42 | 58,1 | 66,2 | 94 | 118 | 129 |
| 13 | 22,4 | 27,7 | 43 | 59,3 | 67,5 | 96 | 120 | 131 |
| 14 | 23,7 | 29,1 | 44 | 60,5 | 68,7 | 98 | 122 | 133 |
| 15 | 25,0 | 30,6 | 45 | 61,7 | 70,0 | 100 | 124 | 136 |
| 16 | 26,3 | 32,0 | 46 | 62,8 | 71,2 | 110 | 135 | 147 |
| 17 | 27,6 | 33,4 | 47 | 64,0 | 72,4 | 120 | 147 | 159 |
| 18 | 28,9 | 34,8 | 48 | 65,2 | 73,7 | 130 | 158 | 170 |
| 19 | 30,1 | 36,2 | 49 | 66,3 | 74,9 | 140 | 169 | 182 |
| 20 | 31,4 | 37,6 | 50 | 67,5 | 76,2 | 150 | 180 | 193 |
| 21 | 32,7 | 38,9 | 52 | 69,8 | 78,6 | 200 | 234 | 249 |
| 22 | 33,9 | 40,3 | 54 | 72,2 | 81,1 | 250 | 288 | 305 |
| 23 | 35,2 | 41,6 | 56 | 74,5 | 83,5 | 300 | 341 | 360 |
| 24 | 36,4 | 43,0 | 58 | 76,8 | 86,0 | 400 | 448 | 469 |
| 25 | 37,6 | 44,3 | 60 | 79,1 | 88,4 | 500 | 553 | 576 |
| 26 | 38,9 | 45,6 | 62 | 81,4 | 90,8 | 600 | 658 | 683 |
| 27 | 40,1 | 47,0 | 64 | 83,7 | 93,2 | 700 | 763 | 790 |
| 28 | 41,3 | 48,3 | 66 | 86,0 | 95,6 | 800 | 867 | 896 |
| 29 | 42,6 | 49,6 | 68 | 88,2 | 98,0 | 900 | 971 | 1002 |
| 30 | 43,8 | 50,9 | 70 | 90,5 | 100 | 1000 | 1075 | 1107 |