

ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ



«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Кафедра системного анализа и управления**

Допущены

к проведению занятий в 2016-2017 уч.году  
Заведующий кафедрой  
профессор

Д.А. Первухин

«\_\_» сентября 2016 г.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ для проведения практических занятий по учебной дисциплине

### **«СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ»**

**Специальность (направление подготовки):** 27.04.04 *Управление в технических системах*

**Специализация (профиль):** *Анализ и синтез технических систем с распределенными параметрами*

**Разработал:** профессор *Першин И.М.*

*Обсуждены и одобрены на заседании кафедры  
Протокол № 1 от 31 августа 2016 г.*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2016

# Практическое занятие 1

## Описание математических моделей гидrolитосферных процессов

### Модель гидроминеральных «пластов»

Математическая модель трех гидроминеральных «пластов» записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 & \frac{dS_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta_1 \frac{\partial S_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta_1 \frac{\partial S_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta_1 \frac{\partial S_1}{\partial z} \right) = F_{y,1} - k_{x1} \frac{\partial S_1}{\partial x} - k_{y1} \frac{\partial S_1}{\partial y} - k_{z1} \frac{\partial S_1}{\partial z}; \\
 & \frac{dS_2}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta_2 \frac{\partial S_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta_2 \frac{\partial S_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta_2 \frac{\partial S_2}{\partial z} \right) = F_{y,2} - k_{x2} \frac{\partial S_2}{\partial x} - k_{y2} \frac{\partial S_2}{\partial y} - k_{z2} \frac{\partial S_2}{\partial z}; \\
 & \frac{dS_3}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta_3 \frac{\partial S_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta_3 \frac{\partial S_3}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta_3 \frac{\partial S_3}{\partial z} \right) = F_{y,3} - k_{x3} \frac{\partial S_3}{\partial x} - k_{y3} \frac{\partial S_3}{\partial y} - k_{z3} \frac{\partial S_3}{\partial z}; \\
 & \frac{dS_4}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta_4 \frac{\partial S_4}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta_4 \frac{\partial S_4}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta_4 \frac{\partial S_4}{\partial z} \right) = F_{y,4} - k_{x4} \frac{\partial S_4}{\partial x} - k_{y4} \frac{\partial S_4}{\partial y} - k_{z4} \frac{\partial S_4}{\partial z};
 \end{aligned} \tag{1}$$

где:  $\eta_j$  - коэффициенты упругости коллектора и относительно водоупорных пород соответственно;

$F_{y,j}$  - скорость движения воды  $j$ -го водоносного пласта;

$k_{xj}, k_{yj}, k_{zj}$  - коэффициенты фильтрации по пространственным координатам;  
 $S_j(x, y, z, t)$  - понижение уровня (от статического) в водоносных горизонтах и водоупорах,

$\hat{S}_i$  - понижение уровня в точке расположения  $i$ -ой водозаборной скважины

$\alpha_{x_i, y_i, z_i}$  - функция, значение которой равно 1 при  $x=x_i, y=y_i, z=z_i$ , а в остальных случаях значение  $\alpha_{x_i, y_i, z_i}=0$ ;

$x_i, y_i, z_i$  - координаты  $i$ -ой водозаборной скважины ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ ).

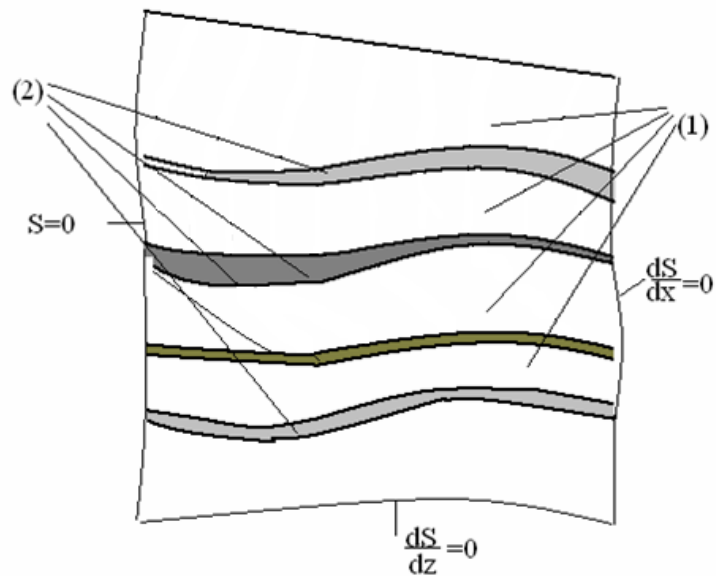


Рис.1 Граничные условия

Условия на границах водоносных и слабопроницаемых пропластков (рис.1) выражает закон неразрывности движения (закон Дарси), и записывается в виде:

$$\frac{dS_1}{dz} = \frac{dS_2}{dz}, \quad (j=1,2),$$

$$\frac{dS_1}{dz} = \epsilon, \quad \frac{dS_3}{dz} = \epsilon \quad (2)$$

$$0 < x < X_L, 0 < y < Y_L$$

Граничные условия на контурах месторождения, выражаются через соотношения:

$$\frac{dS_j}{dx} = \epsilon,$$

$$S_j(Q, y, z, t) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dS_j}{dy} = \frac{dS_k}{dy} = \epsilon, \quad (j=1,2,3).$$

Начальные условия записываются следующим образом:

$$S_j(x, y, z, t = 0) = 0, \quad (j=1,2,3,4).$$

## Практические занятия 2 и 3

### Дискретная модель объекта управления

Выше описана математическая модель объекта, решение выполняется численными методами. Это означает, что вместо дифференциальных уравнений в частных производных решается аналогичная система конечно-разностных уравнений, в которых дифференциалы искомой функции представлены в дискретной форме по координатам пространства и времени.

Чтобы получить такую модель, исследуемая область разбивается равномерной или неравномерной сеткой на элементарные сопряженные блоки с шагом по пространственным координатам  $\Delta x$  и  $\Delta y$   $\Delta z$ , и все физические характеристики объекта в пределах выделенного блока, относят к его центру тяжести (узловой точке). То есть, вместо непрерывного изменения функции во времени и пространстве рассматриваются изменения ее в отдельных точках и через определенные дискретные моменты времени  $\Delta t$ .

Пусть число точек дискретизации по оси X равно I, по оси Y равно J, а по оси Z равно K.

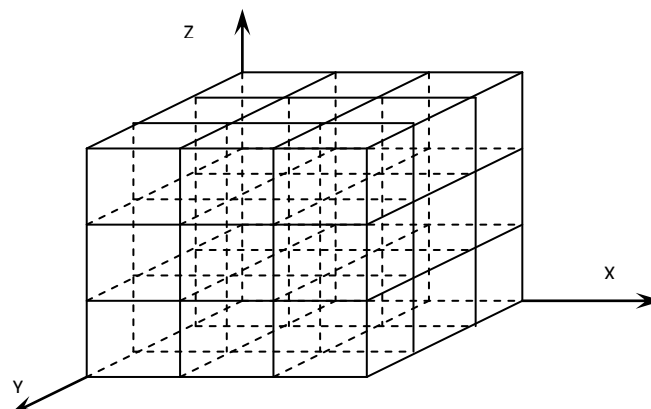
Введем прямоугольную сетку  $\{i, j, k, 1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J, 1 \leq k \leq K, \Delta x, \Delta y, \Delta z\}$ ,

где  $i, j, k$  - координаты узлов сетки;

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$  - шаг дискретизации по осям прямоугольной системы координат X, Y, Z соответственно.

На рис. 2 изображена прямоугольная сетка применительно к рассматриваемому объекту.

Итак, для составления дискретной модели выделим на рассматриваемой сетке восемь близлежащих друг к другу узлов, расположенных таким образом, что в случае их соединения прямыми отрезками, получим прямоугольный параллелепипед. Полученный в результате этих действий параллелепипед и имеющий в узлах точки A, A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7 изображен на рис. 3.



**Рис. 2 Прямоугольная сетка**

Пусть данные точки имеют координаты:

A (i, j, k), A1 (i+1, j, k), A2 (i, j+1, k), A3 (i, j, k+1),

$$A_4(i+1, j, k+1), \quad A_5(i+1, j+1, k), \quad A_6(i, j+1, k+1), \quad A_7(i+1, j+1, k+1).$$

Запись координат  $i+1$ ,  $j+1$  и  $k+1$  указывает на то, что координаты  $i$ ,  $j$  и  $k$  соответственно увеличились на один шаг по введенной сетке.

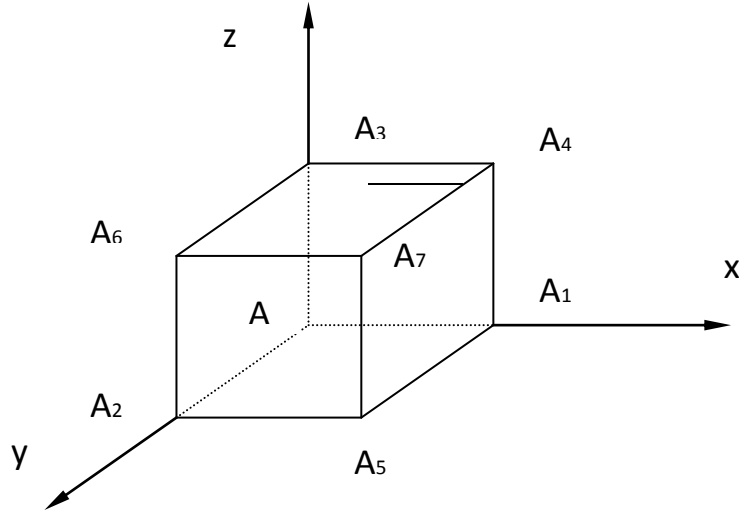


Рис. 3 Прямоугольный параллелепипед

Рассматриваемые пласты разнесены по координате  $Z$ .

Дискретная модель, описывающая процессы в первом пласте имеет вид:

$$\Delta S_1[i, j, k] = \Delta t \cdot ((1/\eta_1[i, j, k] \cdot (\Delta s_1[i, j, k] + \Delta s_2[i, j, k] + \Delta s_3[i, j, k]) - (F[i, j, k] \cdot (\frac{S_1[i, j, k] - S_1[i-1, j, k]}{\Delta x}))))),$$

$$\text{где } \Delta s_1[i, j, k] = K_1[i, j, k] \cdot (S_1[i-1, j, k] - 2 \cdot S_1[i, j, k] + S_1[i+1, j, k]) / \Delta x^2$$

$$\Delta s_2[i, j, k] = K_2[i, j, k] \cdot (S_1[i, j-1, k] - 2 \cdot S_1[i, j, k] + S_1[i, j+1, k]) / \Delta y^2$$

$$\Delta s_3[i, j, k] = K_3[i, j, k] \cdot (S_1[i, j, k-1] - 2 \cdot S_1[i, j, k] + S_1[i, j, k+1]) / \Delta z_2^2$$

$$i = \overline{1, I} \quad j = \overline{1, J} \quad k = \overline{k_1 + 1, k_2 - 1}$$

Дискретная модель, описывающая процессы во втором пласте имеет вид:

$$\Delta S_2[i, j, k] = \Delta t \cdot ((1/\eta_2[i, j, k] \cdot (\Delta s_1[i, j, k] + \Delta s_2[i, j, k] + \Delta s_3[i, j, k]) - (F[i, j, k] \cdot (\frac{S_2[i, j, k] - S_2[i-1, j, k]}{\Delta x})) - S_1[i, j, k] \cdot \delta[i, j, k]))),$$

$$\text{где } \Delta s_1[i, j, k] = K_1[i, j, k] \cdot (S_2[i-1, j, k] - 2 \cdot S_2[i, j, k] + S_2[i+1, j, k]) / \Delta x^2$$

$$\Delta s_2[i, j, k] = K_2[i, j, k] \cdot (S_2[i, j-1, k] - 2 \cdot S_2[i, j, k] + S_2[i, j+1, k]) / \Delta y^2$$

$$\Delta s_3[i, j, k] = K_3[i, j, k] \cdot (S_2[i, j, k-1] - 2 \cdot S_2[i, j, k] + S_2[i, j, k+1]) / \Delta z_3^2$$

$$i = \overline{1, I} \quad j = \overline{1, J} \quad k = \overline{k_2 + 1, k_3 - 1}$$

Дискретная модель, описывающая процессы в третьем пласте имеет вид:

$$\Delta S_3[i, j, k] = \Delta t \cdot ((1/\eta_3[i, j, k] \cdot (\Delta s_1[i, j, k] + \Delta s_2[i, j, k] + \Delta s_3[i, j, k]) - (F[i, j, k] \cdot \frac{S_3[i, j, k] - S_3[i-1, j, k]}{\Delta x}))),$$

где  $\Delta s_1[i, j, k] = K_1[i, j, k] \cdot (S_3[i-1, j, k] - 2 \cdot S_3[i, j, k] + S_3[i+1, j, k]) / \Delta x^2$

$\Delta s_2[i, j, k] = K_2[i, j, k] \cdot (S_3[i, j-1, k] - 2 \cdot S_3[i, j, k] + S_3[i, j+1, k]) / \Delta y^2$

$\Delta s_3[i, j, k] = K_3[i, j, k] \cdot (S_3[i, j, k-1] - 2 \cdot S_3[i, j, k] + S_3[i, j, k+1]) / \Delta z_4^2$

$i = \overline{1, I} \quad j = \overline{1, J} \quad k = \overline{k_3 + 1, k_4 - 1}$

#### Практические занятия 4 и 5 Анализ и моделирование гидrolитосферных процессов

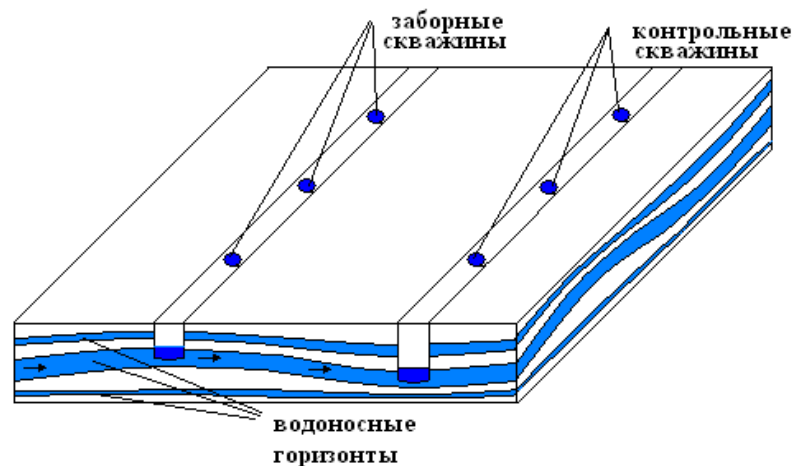


Рис. 4 Объект управления

Добыча минеральной воды в регионе Лермонтова осуществляется с помощью трех рабочих скважин. Измерение уровня понижения давления осуществляется с использованием контрольных скважин расположенных на расстоянии 100 метров от заборных скважин (см. рис. 4).

Рассматриваемая система управления имеет 3 входа и три выхода.

Используя возможность экспериментальных исследований, по известной методике были получены графики переходных процессов, связывающие входы (уровень понижения давления в зоне расположения рабочих скважин) и выходы (уровень понижения в зоне расположения контрольных скважин).

Входное воздействие - уровень понижения в зоне  $i$  рабочей скважины.

Функция выхода - уровень понижения в зоне  $j$  контрольной скважины.

По результатам моделирования работы объекта были построены графики, которые

приведены на рис. 5 - 13.

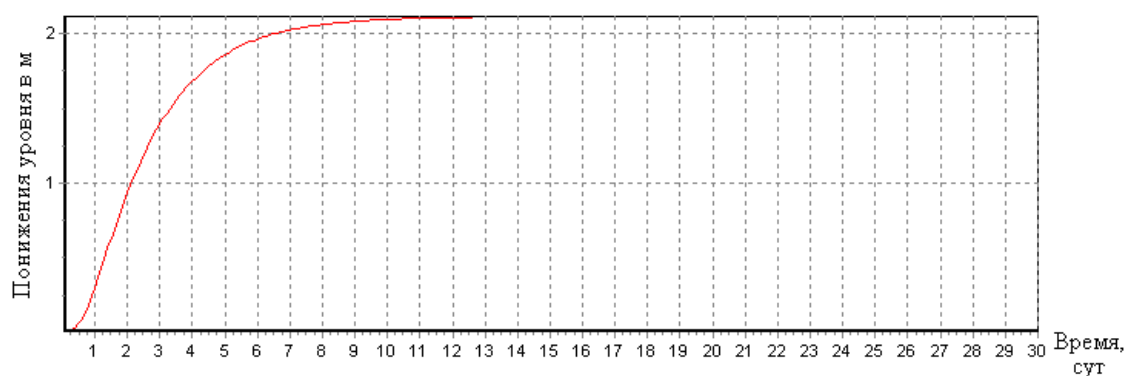


Рис. 5 График функции выхода первой контрольной скважины при входном воздействии  $U_1$  ( $100 \text{ м}^3/\text{сут}$ )

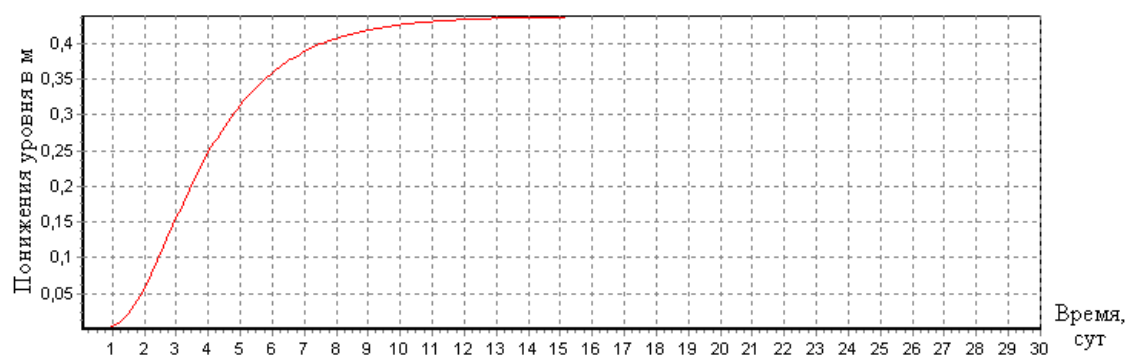


Рис. 6. График функции выхода второй контрольной скважины при входном воздействии  $U_1$  ( $100 \text{ м}^3/\text{сут}$ )

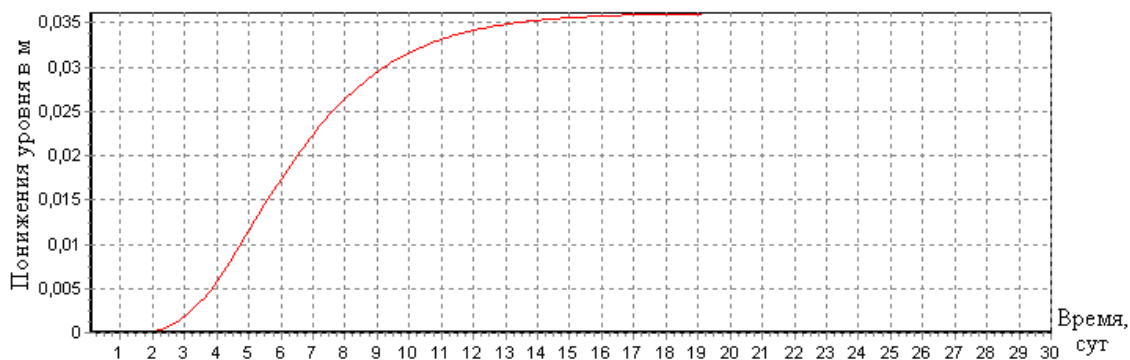


Рис. 7. График функции выхода третьей контрольной скважины при входном воздействии  $U_1$  ( $100 \text{ м}^3/\text{сут}$ )

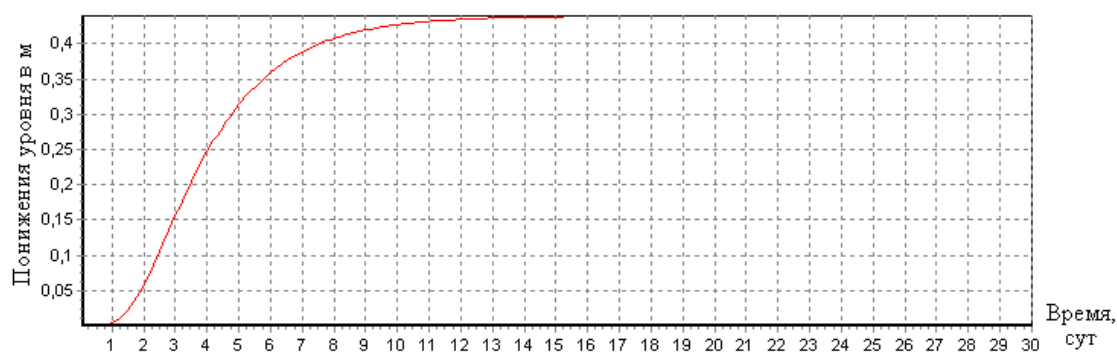


Рис. 8. График функции выхода первой контрольной скважины при входном воздействии  $U_2$  ( $100 \text{ м}^3/\text{сут}$ )

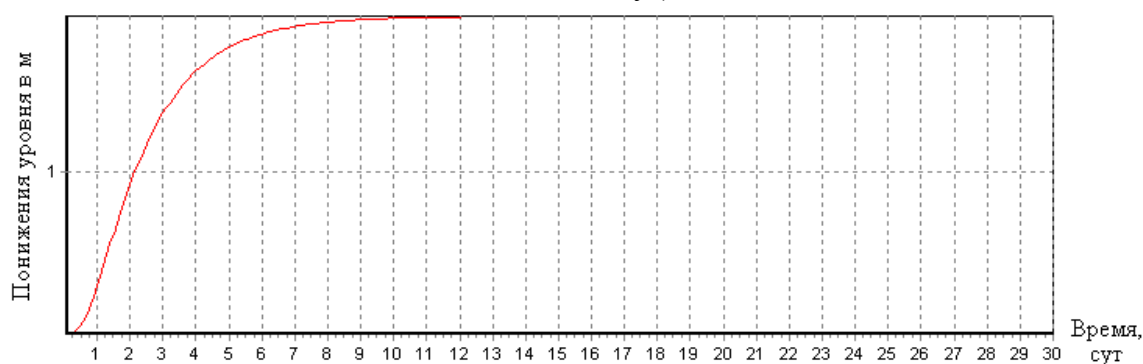


Рис. 9. График функции выхода второй контрольной скважины при входном воздействии  $U_2$  ( $100 \text{ м}^3/\text{сут}$ )

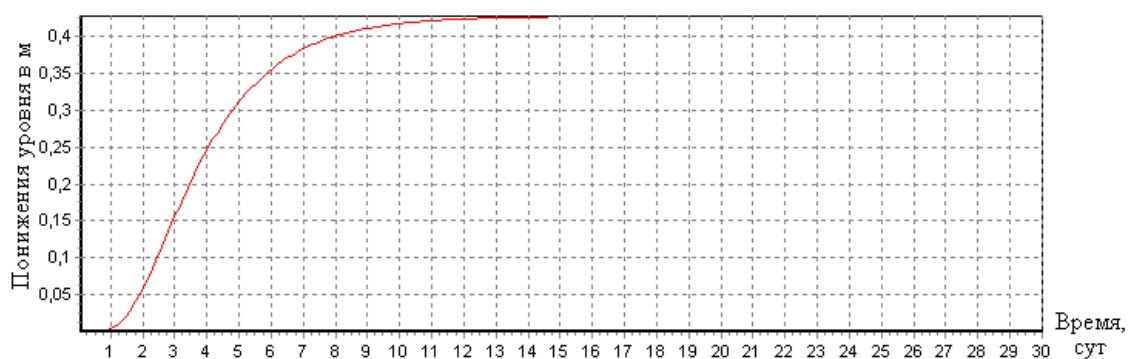


Рис. 10. График функции выхода третьей контрольной скважины при входном воздействии  $U_2$  ( $100 \text{ м}^3/\text{сут}$ )

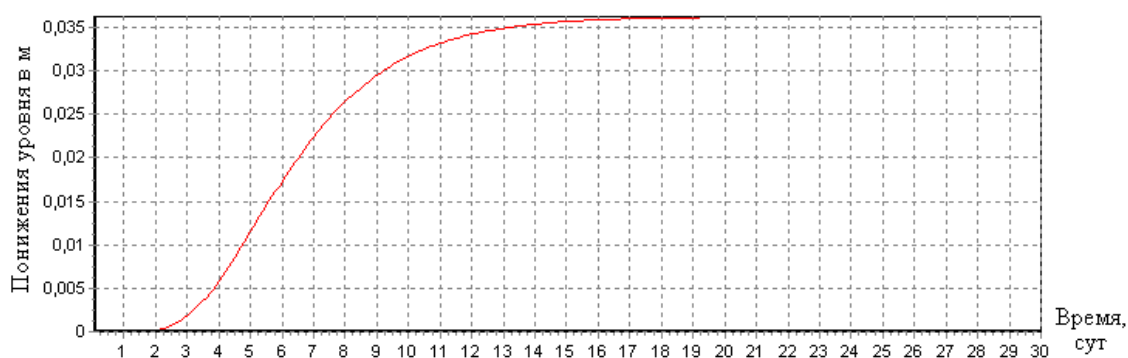


Рис. 11. График функции выхода первой контрольной скважины при входном воздействии  $U_3$  ( $100 \text{ м}^3/\text{сут}$ )



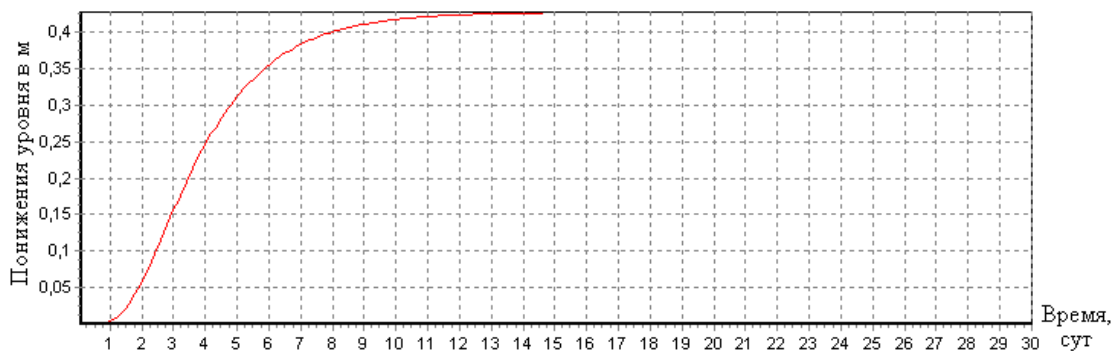


Рис. 12. График функции выхода второй контрольной скважины при входном воздействии  $U_3$  ( $100 \text{ м}^3/\text{сут}$ )

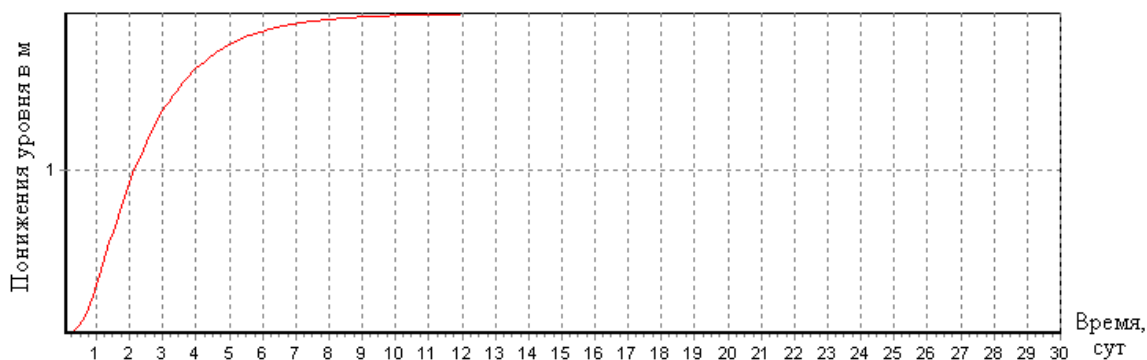


Рис. 13. График функции выхода третьей контрольной скважины при входном воздействии  $U_3$  ( $100 \text{ м}^3/\text{сут}$ )

Таблица 1

Динамические характеристики

Входное воздействие	Наименование	1 секция	2 секция	3 секция
$U_1$	$\Delta S_{\text{уст}}, \text{см}$	215	43,75	3,5
	$k$	2,15	0,44	0,035
	$\tau_3, \text{час}$	0,24	24	54
	$T_p, \text{час}$	108	126	180
$U_2$	$\Delta S_{\text{уст}}, \text{см}$	37,5	180	35,5
	$k$	0,375	1,8	0,355
	$\tau_3, \text{час}$	24	24	24
	$T_p, \text{час}$	126	126	126
$U_3$	$\Delta S_{\text{уст}}, \text{см}$	3,5	45	190
	$k$	0,035	0,45	1,9
	$\tau_3, \text{час}$	54	0,24	0,24
	$T_p, \text{час}$	186	162	102

Используя графики переходных процессов, запишем матрицу передаточных коэффициентов объекта управления:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{2,15}{6480p+1}e^{-14,4p} & \frac{0,044}{7560p+1}e^{-1440p} & \frac{0,035}{10800p+1}e^{-3240p} \\ \frac{0,375}{7560p+1}e^{-1440p} & \frac{1,8}{7560p+1}e^{-1440p} & \frac{0,355}{7560p+1}e^{-1440p} \\ \frac{0,035}{11160p+1}e^{-3240p} & \frac{0,45}{9720p+1}e^{-14,4p} & \frac{1,9}{6120p+1}e^{-14,4p} \end{vmatrix} \quad (4)$$

(постоянные времени приведены в минутах).

## Практическая работа 6

### Основные принципы составления математической модели

#### Общие принципы построения моделей

Упрощенная версия реального мира, выраженная с помощью математической символики, называется моделью. Построение моделей многие считают скорее искусством, чем теорией. Невозможно написать достаточно формализованную инструкцию, учитывающую все многообразие объектов, и, тем не менее, отсутствие точных правил не мешает широко использовать моделирование практически во всех научных областях. К настоящему времени уже накоплен значительный опыт, позволяющий сформулировать общие принципы и требования, которым должна удовлетворять модель. К ним можно отнести следующие :

1. *Адекватность.* Предусматривает соответствие модели целям исследования по уровню сложности и организации, а также соответствие реальному объекту относительно выбранного множества свойств и поставленной задаче. Модели, дающие максимально подробное описание системы, называют имитационными. Они используются в основном для целей чисто теоретического характера. Модели, описывающие основные внутренние механизмы, управляющие развитием системы в целом, называют качественными. С такими моделями приходится сталкиваться в большинстве случаев при решении конкретных задач.

2. *Принцип минимизации размерности описания.* Модели по своей природе всегда носят приближенный характер. Если в имитационной модели необходимо учитывать как можно больше деталей, то качественная модель, напротив, должна содержать их как можно меньше. Компромисс между этими требованиями определяется соотношением «точность/сложность». Минимизация описания достигается:

- уменьшением числа переменных за счет исключения несущественных, или их объединением;
- изменением природы переменных параметров. Переменные параметры рассматриваются в качестве постоянных, дискретные - в качестве непрерывных;
- изменением функциональных зависимостей между переменными: дискретные функции заменяются непрерывными, нелинейные представляются как линейные;
- ограничением точности модели. Точность модели не может быть выше точности исходных данных.

3. *Принцип верификации.* По мере насыщения модели информацией адекватность ее меняется. Ряд факторов, никак не проявившихся на начальных этапах формирования модели и неучтенных в ее структуре, может привести к серьезным погрешностям. По этой причине приходится прибегать к периодическому чередованию процедур прогноза и проверки точности модели с последующей ее корректировкой, которая может осуществляться следующим образом:

- по мере поступления информации структура модели не меняется, уточняются лишь коэффициенты модели;
- по мере поступления информации производится изменение самой структуры модели, более точно отражающей внутренние механизмы функционирования объекта.

4. *Блочное строение.* Модели строятся по блочному принципу, которые выделяются по этапам и режимам функционирования системы. Такой подход существенно упрощает построение модели и все дальнейшие ее модификации.

Перечисленные требования, являются общими, и не учитывают специфики объекта. В то же время специфичность объектов проявляется в любой отрасли и естественно закладывается в виде дополнительных принципов и требований, по которым формируется модель.

Гидролитосферные объекты в этом плане не являются исключением, их особенности, которые необходимо учитывать при формировании моделей, можно сформулировать следующим образом.

1. *Масштабность.* Гидролитосферные объекты характеризуются большими размерами и высокой инерционностью. Реакция от внешнего воздействия может проявляться длительное время, исчисляемое годами или десятилетиями. По этой причине рассматриваются, как правило, региональные динамические модели, в обязательном порядке учитывающие фактор времени.

2. *Высокая неоднородность и слоистое строение.* Предполагает рассмотрение объектов как многопластовых систем с распределенными параметрами. Для изучения строения фильтрационной среды привлекаются дополнительные сведения, полученные в результате геофизических и

геологических исследований (сейсмика, скважинная расходометрия, тектоника, неотектоника и др.).

3. В силу дороговизны геологической информации, объекты изучаются ограниченным количеством точек (скважин), формирующих сеть мониторинга. Анализ и обработка информации требует привлечения специальных методов математической статистики, интерполяции, многофакторного регрессионного анализа.

Долгое время для изучения гидrolитосферных процессов использовалось физическое и аналоговые модели, однако сложность и трудоемкость построения таких моделей ограничивали область их применения. С развитием вычислительной техники, персональных компьютеров, отмечается повсеместный переход к математическим моделям.

На сегодняшний день в практике гидрогеологических исследований используются гидродинамические и гидравлические модели. Они имеют свои достоинства и недостатки, область применения.

Гидродинамические модели (в том числе и методы численного моделирования) широко используются при региональных построениях, позволяют достаточно полно отразить реальные особенности геолого-гидрогеологического строения и режимы эксплуатации объекта, однако и требуют соответствующего информационного обеспечения.

Гидравлические модели – мера вынужденная. Такие модели используются в условиях малой изученности, когда получение необходимого объема информации для построения математической модели по каким-либо причинам невозможно или экономически нецелесообразно. Гидравлические модели требуют минимального объема информации, основаны на фактически наблюдаемой реакции объекта на возмущение и экстраполяции этих данных на перспективу. Следует иметь в виду, что, говоря о гидравлических моделях, чаще всего подразумевают все-таки комбинацию методов гидравлики и гидродинамики, и правильнее называть такие модели комбинированными.

### **Гидравлические модели**

Основная расчетная зависимость, используемая при гидравлических расчетах, имеет вид [4, 10, 119, 120]:

$$S_i = S_0 + \sum_{j=1}^n \nabla S_j + S_t \quad (1.),$$

где  $S_i$  – общее понижение уровня в рассматриваемой скважине, которое складывается из срезок:  $S_0$  – от работы рассматриваемой;  $S_j$  – срезки уровня в рассматриваемой от влияния взаимодействующих;  $S_t$  – срезка уровня, происходящая с течением времени;  $t$  – текущее время;  $n$  – количество взаимодействующих скважин. Знак « $\nabla$ » под суммой указывает, что из нее исключается срезка от рассматриваемой скважины.

Все входящие в (3.1.) величины определяются опытным путем по результатам наблюдений за понижениями уровня в различных точках пласта

под влиянием эксплуатации. Конечно, гидравлические модели не раскрывают физической сути объекта, не дают возможности установить водный баланс, однако преимущество их заключается в том, что фактически установленные срезки комплексно учитывают все сложности объекта, а также влияние климатических факторов (неоднородность, граничные условия, инфильтрационное, глубинное питание, испарение и т.д.).

### ***Гидравлические модели долгосрочного прогнозирования***

Основная задача долгосрочного прогнозирования – подсчет эксплуатационных запасов подземных вод, что предполагает рассмотрение периодов упреждения до 25 лет, а иногда и больше. При этом водозаборные сооружения могут располагаться в виде компактных групп, рассматриваемых как «большой колодец», или нескольких относительно обособленных, гидравлически связанных участков «больших колодцев», или же отдельных скважин, рассредоточенных по площади водоносного горизонта (месторождения).

Процедура решения задачи заключается в том, что на водозаборных сооружениях задается возмущение соответствующее или близкое к проектному. Это опытная откачка, продолжительность которой ( $t_0$ ) определяется требованиями нормативных документов. Так для подсчета запасов по категории «А», продолжительность ее должна составлять не менее года. В процессе откачки фиксируется динамика уровня в скважинах и качественные показатели подземных вод, которые в последствии и используются в расчетах.

Полученная в процессе опытной откачки информация экстраполируется на перспективу по определенным законам, характер которых определяется конкретными геолого-гидрогеологическими особенностями строения объекта.

В основу расчетов положена схема обобщенных систем, согласно которой группа взаимодействующих скважин рассматривается как «большой колодец» с некоторыми усредненными параметрами и дебитом равным сумме дебитов всех взаимодействующих скважин. Положение уровня в рассматриваемой скважине представляет собой сумму срезок, вызванных работой самой скважины, срезки от работы «большого колодца», на момент завершения опытных работ ( $t_0$ ) и временной (прогнозной) срезки на конец расчетного периода ( $t_k$ ). В такой постановке понижение уровня в самой скважине рассматривается как независимое от времени и рассчитывается через удельный дебит скважины. Все остальные изменения в ней относятся к срезке вызванной работой обобщенной системы или «большого колодца», и также определяются по фактически наблюдаемым данным за динамикой снижения уровня в рассматриваемой точке (скважине) за период опытных работ ( $t_0$ ). Прогнозная (временная) срезка на конец расчетного периода ( $t_k$ ) определяется экстраполяцией.

Рассмотрим задачу для напорного неограниченного в плане и изолированного в разрезе водоносного горизонта. При наступлении квазистационарного режима понижение уровня в  $i$ -том каптажном сооружении определится из выражения:

$$S_i = \frac{Q_i}{4\pi km} \operatorname{Ln} \frac{2,25 \cdot a \cdot t}{r_i^2} + \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{4\pi km} \operatorname{Ln} \frac{2,25 \cdot a \cdot t}{\rho_j^2} \quad (2.),$$

где  $r_i$  – радиус скважины;  $\rho_j$  – расстояние от  $j$ -той взаимодействующей скважины до рассматриваемой  $i$ -той.

Рассматривая систему взаимодействующих скважин как «большой колодец» с некоторыми осредненными параметрами, (3.2) можно выразить так:

$$S_i = \frac{Q_i}{4\pi km} \operatorname{Ln} \frac{r_b^2}{r_i^2} + \frac{Q_{\text{сум}}}{4\pi km} \operatorname{Ln} \frac{2,25 \cdot a \cdot t}{r_b^2} \quad (3),$$

где  $r_b$  – некоторый радиус «большого колодца»;  $Q_{\text{сум}}$  – суммарный дебит взаимодействующих скважин. Если в процессе опытной откачки ( $t_0$ ) нагрузки на скважины соответствовали проектным, то вся задача сводится к отысканию прогнозной временной срезки уровня ( $S_t$ ) за период ( $t_0 - t_k$ ), которая находится как разница между достигнутым понижением уровня на момент ( $t_0$ ) и прогнозным на момент ( $t_k$ ):

$$S_t = \frac{Q_i}{4\pi km} \operatorname{Ln} \frac{r_b^2}{r_i^2} + \frac{Q_{\text{сум}}}{4\pi km} \operatorname{Ln} \frac{2,25 \cdot a \cdot t_k}{r_b^2} - \frac{Q_i}{4\pi km} \operatorname{Ln} \frac{r_b^2}{r_i^2} - \frac{Q_{\text{сум}}}{4\pi km} \operatorname{Ln} \frac{2,25 \cdot a \cdot t_0}{r_b^2}$$

или 
$$S_t = \frac{Q_{\text{сум}}}{4\pi km} \operatorname{Ln} \left( \frac{t_k}{t_0} \right) \quad (4).$$

Понижение уровня на конец расчетного периода ( $t_k$ ) определится как сумма фактически зафиксированной срезки ( $S_0$ ) на момент ( $t_0$ ) и расчетной временной ( $S_t$ ):

$$S_k = S_0 + S_t \quad (5).$$

Для полуограниченного пласта с одной непроницаемой границей, расчетная формула будет иметь вид:

$$S_t = \frac{Q_{\text{сум}}}{2\pi km} \operatorname{Ln} \left( \frac{t_k}{t_0} \right) \quad (6).$$

и для пласта с двумя непроницаемыми прямолинейными пересекающимися границами:

$$S_t = \frac{Q_{\text{сум}}}{\pi km} \operatorname{Ln} \left( \frac{t_k}{t_0} \right) \quad (7).$$

При определении уровня в скважине, при условии  $F_0 > 0,8$ , расчетная формула имеет вид [10]:

$$S_i \approx \frac{Q_i}{4\pi km} \operatorname{Ln} \frac{r_b^2}{r_i^2} + \frac{Q_{\text{сум}}}{4\pi km} \left[ \frac{7,1 \cdot \sqrt{a \cdot t}}{L} + 2 \operatorname{Ln} \left( \frac{0,16 \cdot L}{r_b \cdot \sin(\pi \cdot L_1/L)} \right) \right] \quad (8).$$

где  $r_b$  – приведенный радиус обобщенной системы;  $L$  – расстояние между непроницаемыми параллельными границами;  $L_1$  – расстояние до ближайшей границы.

Зная понижение уровня на момент  $(t_0)$ , прогнозное на конечный момент  $(t_k)$  можно определить:

$$S_t = \frac{Q_{\text{сум}}}{4\pi km} \cdot \frac{7,1 \cdot \sqrt{a^*}}{L} \cdot (\sqrt{t_k} - \sqrt{t_0}) \quad (9).$$

*. Пласт-круг.*

При выполнении условия  $t \geq (1,0 \div 1,5) R_k^2 / a^*$ , для группы любым образом расположенных взаимодействующих скважин, расчетная зависимость может быть представлена в следующем виде:

$$S_i = \frac{Q_i}{4\pi km} \ln \frac{r_b^2}{r_i^2} + \frac{Q_{\text{сум}}}{\pi km} \cdot F_0 + \frac{Q_{\text{сум}}}{2\pi km} \ln \frac{R_k}{r_b} \quad (10),$$

где  $Q_i$  – дебит рассматриваемой скважины;  $R_k$  – радиус контура пласта;  $r_b$  – некоторый приведенный радиус обобщенной системы;  $F_0$  – безразмерный параметр Фурье.

На прогнозный момент времени  $(t_k)$  понижение уровня определяется из выражения:

$$S_t = \frac{Q_{\text{сум}} \cdot a^*}{\pi km \cdot R_k^2} \cdot (t_k - t_0) \quad (11).$$

*Пласт с питающими (питающей) границами.*

Пласты, имеющие контуры питания, характеризуются тем, что по истечении более менее продолжительного периода, режим фильтрации в них переходит в стационарный, и временная срезка за период  $(t_0 - t_k)$  равна нулю.

$$S_t = 0 \quad (12).$$

При производстве опытных работ часто приходится сталкиваться с асинхронной работой скважин, когда они вводятся в эксплуатацию последовательно с нарастающим дебитом возмущения. При этом не всегда дебит откачки соответствует проектной величине. В этом случае приходится корректировать фактически наблюдаемые срезки уровня (при дебите опытной откачки) на его проектное значение путем простого пропорционального пересчета, и использовать в расчетах приведенное время. В физическом смысле приведенное время представляет собой отношение всего отобранного из пласта объема воды к последнему дебиту откачки. Такой подход основан на принципе суперпозиции, когда каждая последующая ступень возмущения рассматривается как самостоятельное, с интенсивностью равной разнице дебитов последующей и предыдущей ступени (рис.1.1.).

При логарифмическом законе изменения понижения, приведенное время рассчитывается по формуле:

$$Ln(t_{np}) = \frac{Q_1 \cdot Ln(t) + \Delta Q_2 \cdot Ln(t - t_1) + \dots + \Delta Q_n \cdot Ln(t - t_n)}{Q_{np}} \quad (13).$$

Как уже указывалось, гидравлические методы мера вынужденная и объясняется в первую очередь отсутствием достаточного количества информации об объекте. В то же время изложенные выше формулы для расчета временной срезки содержат емкостные и фильтрационные параметры водоносных горизонтов, определение которых требует постановки и проведения специальных опытно-фильтрационных работ. По этой причине применять

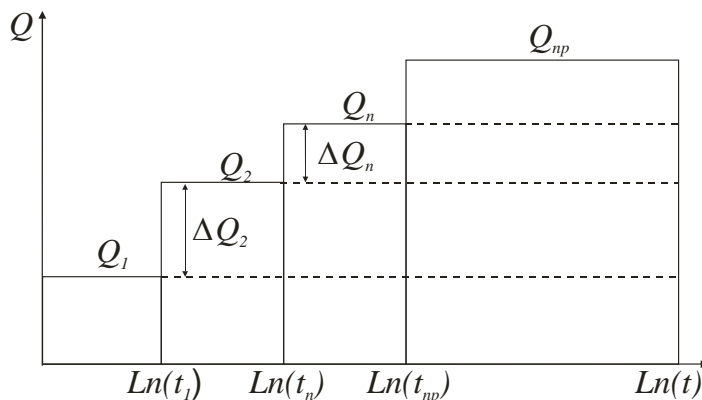


Рис.1. К расчету приведенного времени.

представленные расчетные формулы затруднительно. Более того, геологические объекты довольно сложны по своему строению. Нередко это слоистые толщи, характеризующиеся наличием перетоков между горизонтами, глубинным и инфильтрационным питанием, неясным (по крайней мере, на первых этапах изучения) характером границ. В связи с указанным при прогнозировании необходимо, во-первых, максимально использовать фактические наблюдения за динамикой уровня, полученные на стадии опытной откачки и строить расчеты таким образом, чтобы количество параметров в расчетах ограничивалось, допустим, только водопроницаемостью.

Если опытные работы проводились достаточно длительное время и завершились в пределах третьей зоны, то прогнозное понижение уровня ( $S_k$ ) на конец расчетного периода ( $t_k$ ) можно определить по простой зависимости:

$$S_k = S_0 + B \cdot [\psi(t_{np}^k) - \psi(t_{np}^0)] \quad (14),$$

где  $\psi(t_{np}^k); \psi(t_{np}^0)$  — функция приведенного времени на конец прогнозируемого периода и конец опытных работ соответственно;  $B$  — угловой коэффициент конечного участка графика временного прослеживания понижения.

Аналогичные построения используются для схемы «пласт-полоса» или «пласт-круг» с закрытыми границами.



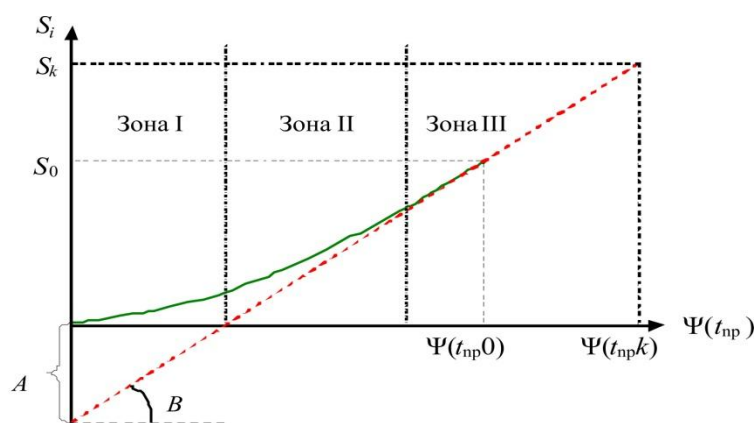


Рис.2. График временного прослеживания понижения в процессе опытной откачки.

Рассмотрим применение гидравлического метода на примере прослеживания динамики уровня по скв. № 45-г. Куюлусского месторождения (рис.3.).

Водоносный горизонт стратиграфически приурочен к песчаным отложениям альбского яруса нижнего мела и содержит напорные, слабосолоноватые воды с минерализацией от 1,8 до 4,0 г/дм<sup>3</sup>. На севере территории водоносные отложения выходят на поверхность в виде узкой полосы, обрамляющей горы Каратау. С удалением от гор, водоносные горизонты погружаются под более молодые образования на глубину от 400 до 1000 м.

В плане водозабор представляет собой линейную систему скважин, расположенных с шагом 1,5 км. одна от другой, при общем количестве 29. Суммарная производительность скважин первого альбского горизонта по мере ввода их в эксплуатацию нарастала от 16000 м<sup>3</sup>/сут. до 36000 м<sup>3</sup>/сут. Схема водозабора включала сеть режимных скважин, по которым с определенной частотой производились измерения уровня. Емкостные и фильтрационные свойства горизонта невелики. Водопроницаемость в среднем составляла 80 м<sup>2</sup>/сут, водоотдача — 0,0002. Низкая интенсивность инфильтрационного питания и слабая восполняемость запасов обусловили основную особенность режима эксплуатации водозабора, которая заключалась в сработке упругих запасов, что приводило к систематическому падению динамических уровней в водоносном горизонте и истощению эксплуатационных запасов. За двадцатилетний период общее понижение уровня в центре депрессии составило более 120 м. и продолжало нарастать, хотя и с меньшей интенсивностью.

Северная граница месторождения ограничена горами Каратау, что позволяет рассматривать схему полуограниченного пласта с непроницаемой границей, однако в зоне выхода на поверхность пласт содержит грунтовые воды, водоотдача которых более чем на два порядка выше напорных, и объемы упругих и гравитационных запасов вполне сопоставимы. В этой

связи рассмотрены два предельных случая: полуограниченный пласт с закрытой границей и неограниченный водоносный горизонт. Среднегодовые сведения по режиму сведены в таблицу 3.1.

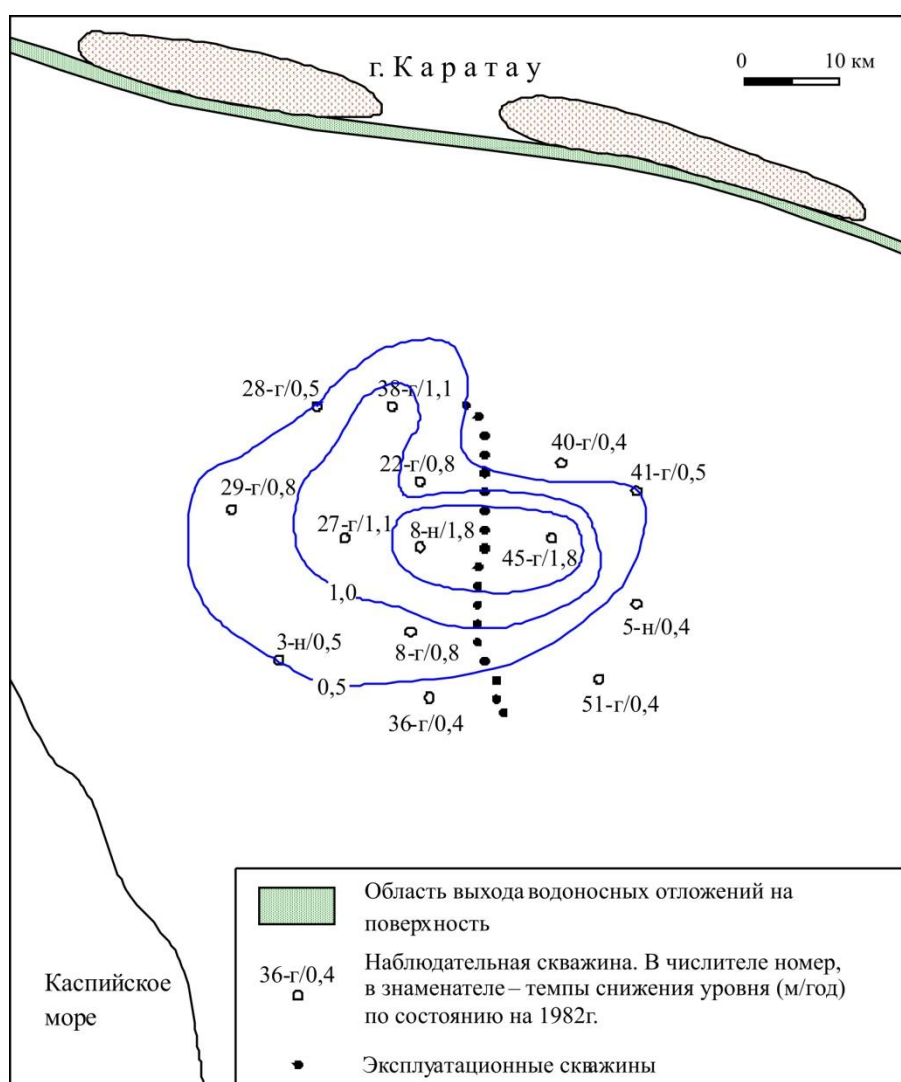


Рис. 3. Схема Куюлусского месторождения артезианских вод (Южно-Мангышлакский артезианский бассейн, Р. Казахстан)

Суммарный водоотбор постепенно нарастал по мере ввода скважин в эксплуатацию с 16000 м<sup>3</sup>/сут до 43000 м<sup>3</sup>/сут. Для анализа использовались данные за 1964 – 1967 гг, которые представлены в виде графика временного прослеживания в удельных понижениях (рис.4.).

Таблица.1.

Сведения по режиму эксплуатации месторождения (скв. № 45-г)

Год	$t_{оп}$ (год)	$t$ сут	$Q$ , м <sup>3</sup> /сут.	$S_{факт}$ м	$Lg(t)$	$Lg(t_{пр})$	$S_i^*$	$S_{расч}$ м
1964	1	365	16000	10,8	2,562	2,560	0,00068	
1965	2	730	24000	21,1	2,863	2,763	0,00088	

1966	3	1095	24000	26,8	3,039	2,981	0,00112	
1967	4	1460	24000	29,8	3,164	3,123	0,00124	29,76
1968	5	1825	36000	36,8	3,261	3,007	0,00102	37,87
1969	6	2190	36000	44	3,340	3,164	0,00122	47,03
1970	7	2555	36000	50,7	3,407	3,270	0,00141	53,21
1971	8	2920	36000	54,1	3,465	3,352	0,00150	58,00
1972	9	3285	36000	55,9	3,517	3,420	0,00155	61,96
1973	10	3650	43000	63,2	3,562	3,307	0,00147	66,14
1974	11	4015	43000	67,3	3,604	3,402	0,00157	72,76
1975	12	4380	43000	71,1	3,641	3,471	0,00165	77,56
1976	13	4745	43000	75,5	3,676	3,528	0,00176	81,53
1977	14	5110	43000	77	3,708	3,576	0,00179	84,88
1978	15	5475	43000	81,9	3,738	3,619	0,00190	87,87
1979	16	5840	43000	84,9	3,766	3,657	0,00197	90,52
1980	17	6205	43000	88,7	3,793	3,692	0,00206	92,96
1981	18	6570	43000	90,2	3,818	3,725	0,00210	95,26
1982	19	6935	43000	92,6	3,841	3,754	0,00215	97,28
1983	20	7300	43000	94,6	3,863	3,782	0,00220	99,23
1984	21	7665	43000	96,6	3,885	3,808	0,00225	101,04
1985	22	8030	43000	98,1	3,905	3,833	0,00228	102,78
1986	23	8395	43000	99,7	3,924	3,856	0,00232	104,38
1987	24	8760	43000	101,1	3,943	3,878	0,00233	105,91
1988	25	9125	43000	104,5	3,960	3,898	0,00236	107,31

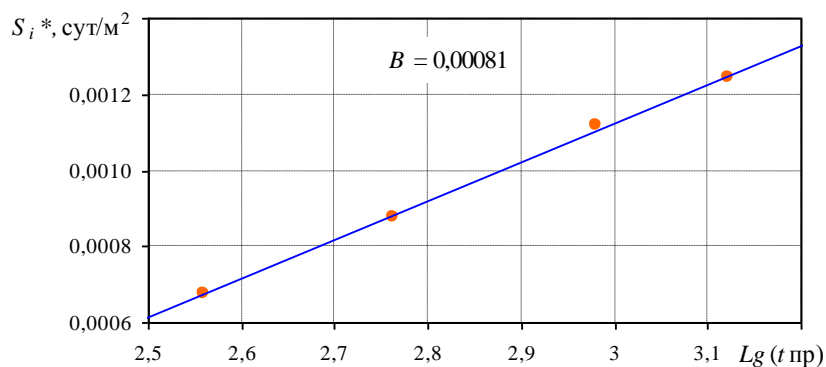


Рис. 4. График временного прослеживания по скважине № 45-г. за период 1964 – 1967 гг.

Угловой коэффициент графика равен 0,00081. Это фактический режим, характеризующий развитие динамики в неограниченном водоносном горизонте. Если полученные закономерности использовать для прогнозирования ситуации с момента завершения опытных работ (1967 г.) на 1988 г, то прогнозное положение уровня (при дебите водозабора 43000 м³/сут) будет равно:

$$S_i/Q_{\text{сум}} = S_i^* = 0,00124 + 0,00081 \cdot [Lg(t_{\text{пр}}) - Lg(t_{\text{пр0}})] \quad (16),$$

где 0,00124 – удельное понижение зафиксированное на конец опытной откачки (1967г);  $t_{np0}$  – приведенное время опытной откачки ( $Lg\ t_{np0} = 3,123$ );  $t_{np}$  – конец прогнозного периода ( $Lg(t_{np}) = 3,898$ ).

Подставляя цифровой материал, получим:

$$S_i = 43000 \cdot [0,00124 + 0,00081 \cdot (3,898 - 3,123)] = 80,2 \text{ м.}$$

Решение изображено на рис.3.5. (линия 1). То есть, если не учесть условия на границе, то ошибка прогнозирования составит 23%.

Рассматривая пласт как полуограниченный с закрытой северной границей, согласно (3.6), временную срезку следует увеличить в два раза. Тогда прогнозное положение его на конец расчетного периода (1988 г.) будет равно:

$S_i = 43000 \cdot [0,00124 + 0,00081 \cdot 2 \cdot (3,898 - 3,123)] = 107,31 \text{ м.}$ , что отличается от фактических данных менее чем на 10 % (рис.3.5, линия 2).

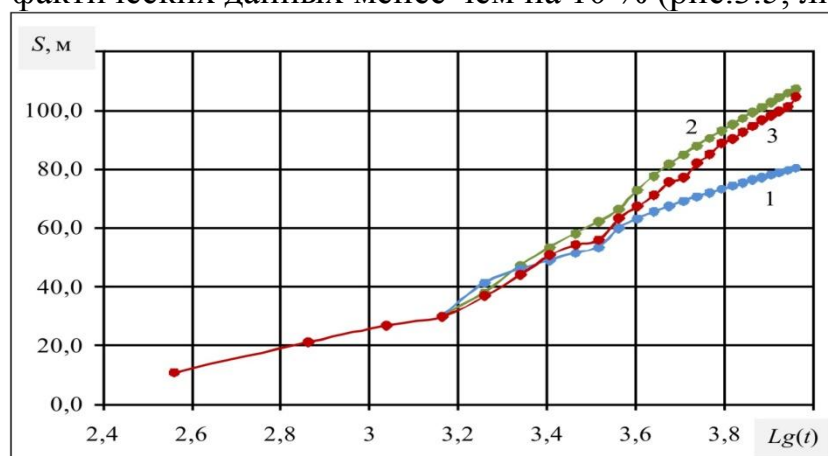


Рис.5. График временного прослеживания понижения в скважине № 45-г за период 1964 – 1988 гг. (1 – без учета закрытой границы; 2 – с учетом закрытой границы; 3 – фактическое.).

### ***Гидравлические модели краткосрочного прогнозирования***

Как следует из описания долгосрочных гидравлических моделей, использовать их в схемах управления довольно проблематично, и вряд ли можно будет на их основе получить эффективную систему, позволяющую оперативно управлять процессами разработки месторождения. Здесь целесообразнее перейти к моделям краткосрочным, которые базировались бы на тех же принципах непосредственного наблюдения за развитием динамики, но охватывали более короткие промежутки времени, в пределах которых возможна достаточно точная экстраполяция фактически наблюдаемых параметров состояния объекта. То есть, речь идет о краткосрочных гидравлических моделях, периоды упреждения которых, обосновываются в первую очередь технологическими соображениями эксплуатации. Как правило, достаточными сроками являются периоды упреждения в 1–3 года. Краткосрочные прогнозы используются в системах оперативного управления водозаборными сооружениями, состоящими из большого числа взаимодействующих скважин. С их производится расчет оптимального

варианта текущей эксплуатации каждой скважины, рациональный подбор погружного насосного оборудования, планирование ремонтных работ. То есть, основная задача краткосрочного прогнозирования – контроль и управление работой скважин конкретного водозабора.

Согласно известным решениям, понижение уровня в  $i$ -той скважине  $S_i^t$  можно определить:

$$S_i^t = \frac{Q_i}{4\pi km} \left( -E_i \left( \frac{-r_i^2}{4a^* t} \right) \right) + \sum_{j=1}^n \nabla \frac{Q_j}{4\pi km} \left( -E_i \left( \frac{-\rho_{ij}^2}{4a^* t} \right) \right) , \quad \text{.где}$$

$Q_i$  – прогнозная производительность скважины;  $E_i$  – интегральная показательная функция;  $r_i$  – радиус скважины;  $a^*$  – пьезопроводность пласта;  $\rho_{ij}$  – расстояние от рассматриваемой скважины до  $j$ -той взаимодействующей, работающей с дебитом  $Q_j$ ;  $t$  – текущее время.

Положим, что за прогнозируемый период  $\Delta t$  произойдет перераспределение водоотбора между скважинами. В этом случае понижение уровня может быть представлено:

$$S_i^{t+\Delta t} = \frac{Q_i}{4\pi km} \left( -E_i \left( \frac{-r_i^2}{4a^* (t + \Delta t)} \right) \right) + \sum_{j=1}^n \nabla \frac{Q_j}{4\pi km} \left( -E_i \left( \frac{-\rho_{ij}^2}{4a^* (t + \Delta t)} \right) \right) + \\ + \frac{\Delta Q_i}{4\pi km} \left( -E_i \left( \frac{-r_i^2}{4a^* \Delta t} \right) \right) + \sum_{j=1}^n \nabla \frac{\Delta Q_j}{4\pi km} \left( -E_i \left( \frac{-\rho_{ij}^2}{4a^* \Delta t} \right) \right) .$$

Срезка уровня за прогнозный период  $\Delta S_i$  определится как разница (3.29) и (3.28). Причем, если речь идет о квазистационарном режиме, то решение упрощается:

$$\Delta S_i = S_i^{t+\Delta t} - S_i^t = \frac{Q_i}{4\pi km} \operatorname{Ln} \frac{t + \Delta t}{t} + \sum_{j=1}^n \nabla \frac{Q_j}{4\pi km} \operatorname{Ln} \frac{t + \Delta t}{t} + \\ + \frac{\Delta Q_i}{4\pi km} \operatorname{Ln} \frac{2,25 a^* \Delta t}{r_i^2} + \sum_{j=1}^n \nabla \frac{\Delta Q_j}{4\pi km} \operatorname{Ln} \frac{2,25 a^* \Delta t}{\rho_{ij}^2} .$$

При выполнении условия  $\Delta t \leq 0,2t$ , с погрешностью не более 10%  $\operatorname{Ln}(t + \Delta t/t) \approx \Delta t/t$ , и тогда, после несложных преобразований будем иметь:

$$\Delta S_i = \frac{Q_{\text{сум}}}{4\pi km t} \Delta t + \frac{\Delta Q_i}{4\pi km} \operatorname{Ln} \frac{2,25 \cdot a^* \Delta t}{r_i^2} + \sum_{j=1}^n \nabla \frac{\Delta Q_j}{4\pi km} \operatorname{Ln} \frac{2,25 \cdot a^* \Delta t}{\rho_{ij}^2} .$$

Здесь первый член в правой части уравнения представляет собой районные темпы снижения уровня от работы всей системы как обобщенной, второй – срезку уровня от работы самой скважины, третий – суммарную срезку от работы взаимодействующих скважин.

Если водозаборы представляют собой упорядоченные системы скважин, расположенных в виде линейного ряда, кольцевых или площадных систем, с постоянным шагом  $\sigma$  между скважинами, то можно упростить. Как показывает опыт, под знак суммы достаточно включить только ближайшие взаимодействующие скважины, расположенные на расстоянии шага  $\sigma$ .

Срезки от более удаленных, хотя и будут иметь место, по величине незначительны и учтутся в темпах. Тогда преобразуется к виду:

$$\Delta S_i = \frac{Q_{\text{сум}}}{4\pi km \cdot t} \Delta t + \frac{\Delta Q_i}{4\pi km} \ln \frac{\sigma^2}{r_i^2} + \frac{\Delta Q_{bi}}{4\pi km} \ln \frac{2,25 \cdot a^* \Delta t}{\sigma^2},$$

где  $\Delta Q_{bi}$  – изменение дебита блока скважин (рассматриваемой и ближайших по обе стороны от нее).

$$\Delta S_i = V \cdot \Delta t + C_i \cdot \Delta Q_i + C_{bi} \cdot \Delta Q_{bi}, \quad \text{где } V$$

– районные темпы снижения уровня;  $C_i$  – удельное понижение скважины;  $C_{bi}$  – удельное понижение блока скважин.

Таблица

Сопоставление расчетных и фактических динамических уровней за период 1982-1983 гг.

№ скв.	$H^{-1}$	$C_i$	$C_{bi}$	$\Delta Q_i$	$\Delta Q_{bi}$	$V \times t$	$C_i \Delta Q_i$	$C_{bi} \Delta Q_{bi}$	$S_{\text{расч}}$	$H'_{\text{расч.}}$	$H'_{\text{факт}}$	$d\%$
1	54,0	0,0103	0,0053	0	0	0,3	0,0	0,0	0,3	53,7	55,8	-3,8
2	43,0	0,0109	0,0053	0	0	0,3	0,0	0,0	0,3	42,7	41,4	3,1
3	36,0	0,0087	0,0042	0	-200	0,3	0,0	-0,8	0,3	35,7	31,2	14,4
4	-7,0	0,0106	0,0048	170	-200	0,3	1,8	-1,0	2,1	-9,1	-9,0	1,1
5	24,8	0,0071	0,0042	0	0	0,3	0,0	0,0	0,3	24,5	21,6	13,4
6	5,5	0,0086	0,0046	210	80	0,5	1,8	0,4	2,3	3,2	3,0	6,5
7	23,4	0,0121	0,0036	0	810	0,5	0,0	2,9	0,5	22,9	21,0	9,0
8	-9,8	0,0100	0,0042	1010	750	0,5	10,1	3,2	10,6	-20,4	-19,8	3,0
9	-10,0	0,0089	0,0036	0	710	1,0	0,0	2,6	1,0	-11,0	-12,5	-12,0
10	-20,0	0,0101	0,0037	0	40	1,0	0,0	0,1	1,0	-21,0	-23,6	-11,0
11	-16,0	0,0092	0,003	-140	600	1,0	-1,3	1,8	-0,3	-15,7	-18,0	-12,7
12	-10,0	0,0760	0,003	-20	-60	1,0	-1,5	-0,2	-0,5	-9,5	-11,0	-13,8
13	-35,0	0,0109	0,0035	-1120	-20	1,5	-12,2	-0,1	-10,7	-24,3	-24,5	-0,8
14	-23,6	0,0066	0,0033	-680	-2480	1,5	-4,5	-8,2	-3,0	-20,6	-21,0	-1,8
15	-36,0	0,0065	0,0039	-2540	-1980	1,5	-16,5	-7,7	-15,0	-21,0	-24,0	-12,5
16	-44,0	0,0099	0,0042	-120	-2230	1,5	-1,2	-9,4	0,3	-44,3	-39,0	13,6
17	-50,3	0,0077	0,0037	-590	-490	1,0	-4,5	-1,8	-3,5	-46,8	-50,5	-7,4
18	-54,0	0,0070	0,0037	-160	-110	1,0	-1,1	-0,4	-0,1	-53,9	-55,0	-2,0
19	-57,0	0,0080	0,0053	960	70	1,0	7,7	0,4	8,7	-65,7	-61,0	7,7
20	-63,0	0,0061	0,0035	-140	290	1,0	-0,9	1,0	0,1	-63,1	-61,6	2,5
21	-62,0	0,0066	0,0045	650	-420	1,0	4,3	-1,9	5,3	-67,3	-66,6	1,0
22	-40,5	0,0070	0,0042	-260	-70	1,0	-1,8	-0,3	-0,8	-39,7	-44,0	-9,8
23	-77,6	0,0070	0,0038	-120	-880	0,5	-0,8	-3,3	-0,3	-77,3	-78,0	-0,9
24	-84,3	0,0064	0,0034	0	-490	0,5	0,0	-1,7	0,5	-84,8	-87,6	-3,2
25	-83,0	0,0070	0,0048	-140	-840	0,5	-1,0	-4,0	-0,5	-82,5	-77,0	7,2
26	-80,6	0,0066	0,0048	-80	-40	0,5	-0,5	-0,2	0,0	-80,6	-86,0	-6,3
27	-65,3	0,0095	0,0053	-240	-230	0,5	-2,3	-1,2	-1,8	-63,5	-63,2	0,5
28	-63,0	0,0166	0,0049	-1180	-230	0,5	-19,6	-1,1	-19,1	-43,9	-47,0	-6,6
29	-51,8	0,0074	0,0045	-320	-400	0,5	-2,4	-1,8	-1,9	-49,9	-51,5	-3,0

Опыт применения краткосрочных гидравлических моделей на Куюлусском месторождении показал их довольно высокую эффективность. Они использовались в системе оперативного управления водозабором для поддержания оптимальных режимов текущей эксплуатации скважин, подбора необходимого погружного насосного оборудования, расчета

глубины его установки. В зависимости от задачи, продолжительность прогнозного периода составляла от одного квартала до трех лет. При этом среднеквадратическая погрешность расчетов не превышала 10%.

## Математические модели

### Исходные дифференциальные уравнения

Математические модели строятся на принципах сохранения энергии или баланса, чаще всего это так называемые динамические модели, в основе которых лежит описание объекта дифференциальными уравнениями с определяемыми по эмпирическим данным параметрами. Математические модели несравненно более трудоемки по сравнению с гидравлическими, требуют значительно большего объема информации и знаний об объекте, однако и преимущества их перед гидравлическими очевидны. Они довольно точно описывают физику геофильтрационного процесса, на их основе можно выполнять балансовые расчеты, прогнозировать динамику массопереноса. В общем случае система исходных дифференциальных уравнений, описывающих пространственный процесс фильтрации и массопереноса, при некоторых допущениях может быть представлена следующим образом :

$$\begin{cases} \eta^* \frac{\partial H}{\partial t} = k_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \\ n \frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - V_x \frac{\partial C}{\partial x} - V_y \frac{\partial C}{\partial y} - V_z \frac{\partial C}{\partial z} - W_R \end{cases} ,$$

где:  $\eta^*$  - упругость пласта;  $k_x, k_y, k_z$  - коэффициенты фильтрации по соответствующим координатам,  $H$  - функция напора;  $n$  - активная пористость;  $D_x, D_y, D_z$  - коэффициент гидродинамической дисперсии;  $C$  - концентрация исследуемого компонента;  $V_x, V_y, V_z$  - компоненты скорости фильтрации по соответствующим координатам;  $W_R$  - параметр, характеризующий интенсивность внутрипластовых обменных процессов.

Уравнения дополняются условиями однозначности, представляющими собой совокупность начальных и граничных условий.

Если основными процессами, определяющими поглощение или потери солей из раствора, являются сорбция, ионный обмен, задержка солей в тупиковых порах и перетоки солей через кровлю и подошву пласта, то  $W_R$  можно представить в следующем виде :

$$W_R = n \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{D_n}{m} \frac{\partial C_n}{\partial z} \Big|_{z=z_n} - \frac{D_k}{m} \frac{\partial C_k}{\partial z} \Big|_{z=z_k} - \frac{V_{zn}}{m} C_n \Big|_{z=z_n} + \frac{V_{zk}}{m} C_k \Big|_{z=z_k} ,$$

где  $N$  - количество солей, переходящих в твердую фазу и задерживающихся в тупиковых порах;  $C_n, C_k$  - концентрации солей поровых растворов солей в подошве и кровле соответственно;  $D_n, D_k$  - коэффициенты диффузии пород подошвы и кровли.

Коэффициент диффузии является обобщенным параметром молекулярной ( $D_m$ ) и конвективной диффузии или гидравлической дисперсии ( $D_r$ ):

$$D = D_m + D_r.$$

Коэффициент молекулярной диффузии в пористой среде  $D_m$  связан с коэффициентом молекулярной диффузии в свободном пространстве (в жидкости)  $D_m^0$ :

$$D_m = \lambda_1 n D_m^0. (\lambda_1 < 1, 0).$$

Коэффициент гидравлической дисперсии зависит от скорости фильтрации и внутренней структуры пористой среды:

$$D_r = \lambda_2 V.$$

Уравнение кинетики сорбции в общем виде может быть выражено следующим образом :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(C, N, C_p, N_p),$$

где  $C$ ,  $N$  – изменяющиеся во времени концентрации вещества в жидкой и твердой фазах;  $C_p$ ,  $N_p$  – равновесные концентрации.

Применительно к грунтам кинетика сорбции описывается уравнением:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \alpha \cdot (C - C_p),$$

где  $\alpha$  – кинетический коэффициент (константа скорости сорбции) [ $\text{сут}^{-1}$ ];  $C$  – средняя концентрация в жидкой фазе в момент времени  $t$ ;  $C_p$  – концентрация равновесия с количеством вещества  $N$ , поглощенным твердой фазой в данном месте. Связь между  $N$  и  $C_p$  определяется изотермой сорбции. При линейной изотерме Генри:

$$C_p = \beta N,$$

где  $\beta$  – коэффициент распределения вещества при сорбции. С учетом сказанного:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \alpha \cdot (C - \beta \cdot N).$$

В тех случаях, когда сорбционное равновесие устанавливается очень быстро, кинетическая сорбция характеризуется уравнением:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Решение системы представляется малореальным, во-первых, из-за математической сложности такой задачи, во-вторых - из-за недостаточной параметрической обеспеченности модели при существующей методической базе экспериментальных исследований, и в практических задачах значительно чаще рассматриваются плоско-пространственные задачи. Для конвективного переноса вещества, дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \mu^* \frac{\partial H}{\partial t} &= km_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + km_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + b_{k-1}(H_{k-1} - H) + b_{k+1}(H_{k+1} - H) \end{aligned} \right.$$



$$n \frac{\partial C}{\partial t} = -V_x \frac{\partial C}{\partial x} - V_y \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{V_{zn} \cdot (C - C_n)}{m} + \frac{V_{zk} \cdot (C - C_k)}{m},$$

где:  $\mu^*$  - водоотдача пласта;  $b_k, b_n$  - параметр перетекания относительно водоупорного пласта, залегающего в кровле и подошве;  $H$  - напор в изучаемом водоносном горизонте;  $H_k, H_n$  - напоры в смежных водоносных горизонтах: кровле и подошве соответственно;  $km$  - водопроводимость пласта;  $m$  - мощность водоносного горизонта;  $n$  - активная пористость;  $V_{zn}, V_{zk}$  - скорости перетекания воды через кровлю и подошву пласта соответственно.

Решение выполняется численными методами. Это означает, что вместо дифференциальных уравнений в частных производных решается аналогичная система конечно-разностных уравнений, в которых дифференциалы искомой функции представлены в дискретной форме по координатам пространства и времени. Чтобы получить такую модель, исследуемая область разбивается равномерной или неравномерной сеткой на элементарные сопряженные блоки с шагом по пространственным координатам  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , и все физические характеристики объекта в пределах выделенного блока, относят к его центру тяжести (узловой точке). То есть, вместо непрерывного изменения функции во времени и пространстве рассматриваются изменения ее в отдельных точках и через определенные дискретные моменты времени  $\Delta t$ . Так, для первого уравнения системы можно записать:

$$\mu^* \frac{H_{i,j}^{t+1} - H_{i,j}^t}{\Delta t} = \left( \frac{km_i(H_{i-1,j} - H_{i,j}) - km_{i+1}(H_{i,j} - H_{i+1,j})}{\Delta x^2} \right) + \left( \frac{km_j(H_{i,j-1} - H_{i,j}) - km_{j+1}(H_{i,j} - H_{i,j+1})}{\Delta y^2} \right) + b_k(H_k - H_{i,j}) + b_n(H_n - H_{i,j}).$$

В результате такого перехода получается система простых алгебраических уравнений относительно искомой функции, для решения которой используются разнообразные численные методы. В настоящее время известны явные, явно- неявные, неявные методы, позволяющие учитывать процессы перетекания и самые различные граничные условия. Они реализованы в многочисленных программах (Топаз, Plast, ModTech, МИФ-3 и др), и с позиций математики решение уравнений вида (3.37), (3.39) особой сложности не представляет.

Более сложной задачей является параметрическое обеспечение модели. Как уже указывалось, геологические объекты это системы с распределенными параметрами, и обоснование пространственного распределения гидродинамических параметров является ответственной задачей. Наиболее употребительными схемами неоднородности являются:

- однородный (квазиоднородный) пласт. Распределение параметров хаотично, но с несущественной амплитудой изменчивости;
- упорядоченно-неоднородный — при существенной амплитуде значений и закономерном распределении в пространстве;

- существенно неоднородный. Значительный хаотичный разброс параметров.

Конечно, при формировании модели предварительная информация о фильтрационных свойствах среды имеется. Она определяется на основе полевых опытно-фильтрационных работ, которые проводятся в процессе геологического изучения объекта, однако это точечные оценки, которые не всегда совпадают со средними значениями, характеризующими процессы геофильтрации. В этой связи очень важно располагать методикой верификации, позволяющей по данным эпигноза производить корректировку параметров модели. То есть, имеющуюся информацию о режимах эксплуатации объекта за прошедшие периоды, воспроизводят на модели, и с помощью специальных приемов вводят корректировку параметров, обеспечивая максимальную сходимость фактических и модельных данных.

### ***Условия однозначности***

Это граничные и начальные условия. Граничные условия (внутренние и внешние) устанавливаются на основе целого комплекса геолого-гидрогеологических, геофизических исследований и буровых работ.

*Граничные условия I рода* выражаются в форме сохранения на границе напора, постоянного или переменного во времени:

$$H = \text{const}, H = f(t).$$

*Граничные условия II рода* представлены функцией удельного расхода потока, нормального к границе:

$$q = \text{const}, q = f(t).$$

*Граничные условия III рода* выражают линейную зависимость между единичным расходом и разностью напоров на границе области:

$$q = a \Delta H + b.$$

Принципы их задания на модели изложены в многочисленных источниках.

Начальные условия имеют две постановки:

$$t = 0, Q = 0, S = 0.$$

$$t = 0, Q = 0, H = H_{\text{ст.}}$$

В первом случае естественная пьезометрическая поверхность уровня подземных вод рассматривается как нулевая, расчеты ведутся в понижениях, и после завершения вычислений, полученные срезки уровня даются в виде схемы распределения понижений или накладываются на статическую поверхность, в результате чего получается искомая схема распределения динамических уровней. Эта постановка встречается наиболее часто. Она проста, не требует знания начального распределения естественных напоров, объем вычислений здесь минимален. Может быть, для целого ряда задач она вполне приемлема, однако при изучении процессов миграции, массопереноса, задач экологического плана, необходимо иметь решение не в понижениях, а в напорах.

Во второй постановке, когда на модели задается начальное распределение статической поверхности, и расчет ведется не в понижениях, а в напорах, задача становится несколько сложнее. Дело в том, что

естественная поверхность зеркала подземных вод формируется под воздействием не только латеральных, но и вертикальных перетоков. Если вертикальные перетоки не задать на модели, то со временем, в силу закона сообщающихся сосудов, естественная поверхность превратится в горизонтальную плоскость. Иными словами во второй постановке требуется проведение дополнительных расчетов с целью определения вертикальных расходов и заданием их каким-то образом на модели. Принимая естественный режим фильтрации как стационарный, перепишем в следующем виде:

$$-W_k - W_n = -\Delta W = \left( \frac{km_i(H_{i-1,j} - H_{j,i}) - km_{i+1}(H_{i,j} - H_{i+1,j})}{\Delta x^2} \right) + \left( \frac{km_j(H_{i,j-1} - H_{i,j}) - km_{j+1}(H_{i,j} - H_{i,j+1})}{\Delta y^2} \right),$$

где  $W_k$ ,  $W_n$  – соответственно питание горизонта в кровле и подошве. Зная начальное распределение естественных напоров в пласте и водопроницаемость разреза, можно по (3.31) определить суммарную вертикальную величину подпитки горизонта ( $\Delta W$ ) если согласиться с допущением, что на нижней границе водонапорной системы имеет место ГУ второго рода ( $q = 0$ ). Это допущение вполне приемлемо, поскольку с увеличением глубины, фильтрационные свойства разреза снижаются довольно существенно. Тогда рассматривая задачу последовательно снизу вверх, можно установить перетоки для каждого горизонта и оценить степень гидравлического взаимодействия пластов.

Рассматривая пласт как кусочно-однородный, со средним значением водопроницаемости ( $km$ ), для самого нижнего пласта рассматриваемой системы (при равномерной дискретизации пространства  $\Delta x = \Delta y$ ), можно записать:

$$-\Delta W_k = km_k \left( \frac{H_{i-1,j} + H_{i+1,j} + H_{i,j-1} + H_{i,j+1} - 4H_{i,j}}{\Delta x^2} \right), \quad \text{а при известном напоре в}$$

смежном горизонте ( $H_{i,j}^*$ ):

$$-\Delta W_k = b_k(H_{i,j} - H_{i,j}^*) = km_k \left( \frac{H_{i-1,j} + H_{i+1,j} + H_{i,j-1} + H_{i,j+1} - 4H_{i,j}}{\Delta x^2} \right), \quad \text{откуда можно}$$

определить параметр перетекания:

$$b_k = km_k \cdot \left( \frac{H_{i-1,j} + H_{i+1,j} + H_{i,j-1} + H_{i,j+1} - 4H_{i,j}}{(H_{i,j} - H_{i,j}^*) \cdot \Delta x^2} \right).$$

Если подобным образом провести расчеты для всех блоков и водоносных горизонтов, и вычислив параметры перетекания при принятых значениях водопроницаемости, ввести их в модель вместе со статическими напорами, то полученное решение будет отвечать стационарной модели, или начальным условиям во второй постановке.

Если же такое допущение не принимается ( $W_{k-1} \neq 0$ ), то для решения указанной задачи необходима дополнительная информация, которая может быть получена, например, из кустовых опытно-фильтрационных работ.

По данным кустовой откачки из  $k$ -того горизонта определяются водопроницаемость ( $km_k$ ) и комплексный параметр ( $B$ ), в результате чего получается система из двух уравнений с двумя неизвестными:

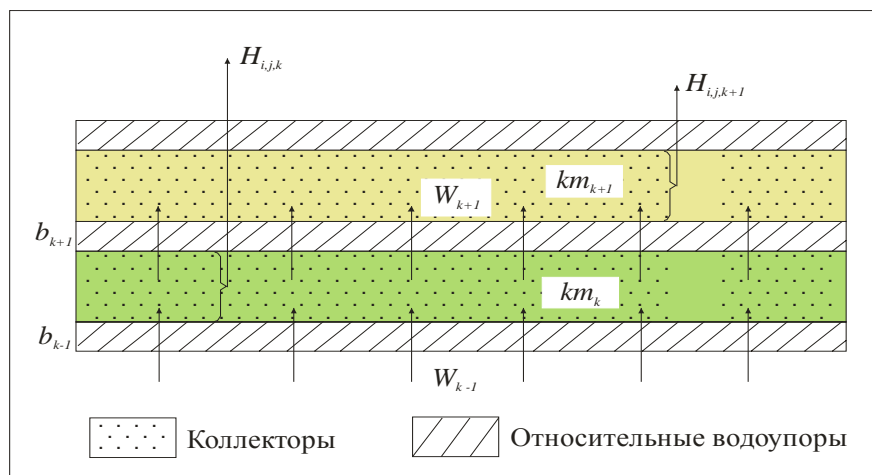


Рис.6. Расчетная схема.

$$B = \sqrt{\frac{km_k}{b_{k-1} + b_{k+1}}}$$

$$\Delta W_k = W_{k+1} - W_{k-1} = b_{k-1} \cdot (H_{k-1} - H_k) + b_{k+1} \cdot (H_{k+1} - H_k),$$

откуда достаточно просто найти неизвестные  $b_{k-1}$ ,  $b_{k+1}$ .

В этом случае последовательность вычислений значения не имеет, и можно производить изучение разреза с любого водоносного горизонта. Однако, как следует из во-первых, потребуется информация о распределении напоров в подстилающем водоносном слое ( $H_{k-1}$ ), во-вторых - параметры перетекания ( $b_{k-1}$ ) можно определить только в некоторых ограниченных точках, соответствующих местам расположения гидрогеологических кустов. На остальной площади он может быть получен только методом интерполяции, и для получения стационарной поверхности, потребуется увязка пьезометрических напоров и параметров через соотношение  $b/km$ . Исходя из этих соображений, целесообразнее начинать изучение разреза с водоносных горизонтов, по которым имеется максимальное количество кустовых гидрогеологических точек наблюдения.

### **Верификация математических моделей**

Параметры водоносных горизонтов определяют путем проведения опытно-фильтрационных работ (откачек) на специально оборудованных точках (кустах), реализуемым по разнообразным схемам и характере возмущения. В результате опытных работ получают точечные определения емкостных и фильтрационных свойств водоносных горизонтов и активность

гидравлической связи их в разрезе. В то же время нельзя забывать, что водоносные горизонты это системы с распределенными параметрами, значения которых в точности нам неизвестны. Кроме того, точечные параметры устанавливаются по относительно коротким интервалам времени и не в полной мере характеризуют фильтрационные свойства водоносных пластов. В этой связи представляется целесообразным производить корректировку параметров по данным опыта эксплуатации, охватывающего несоизмеримо большие отрезки времени.

Постановка задачи следующая. Имеется ряд наблюдений за динамикой уровня в эксплуатационных скважинах и скважинах наблюдательной сети, режим эксплуатации объекта, особенности его геолого-гидрогеологического строения. Необходимо уточнить параметры водоносного горизонта: водопроницаемость, водоотдачу, коэффициент перетекания, граничные условия.

Рассматривается плоско-пространственная задача, описываемая дифференциальным уравнением вида (3.39). Фильтрационная среда принимается кусочно-однородной.

Задача решается на модели путем прогонки ряда вариантов с различными значениями цифровых параметров водоносных горизонтов вводимых по определенному алгоритму. В качестве критерия адекватности использовалось среднеквадратичное отклонение модельных данных от фактических, вычисляемое по формуле:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (S_{jm} - S_{jf})^2}{n}},$$

где:  $S_{jm}$ ,  $S_{jf}$  – соответственно модельное и фактическое понижение уровня в рассматриваемой наблюдательной скважине (блоке);  $n$  – количество точек наблюдения в выбранном диапазоне временного интервала.

Моделирование выполняется на любой из программ, описывающих планово-пространственную фильтрацию. Вся область фильтрации разбивается равномерной или неравномерной сеткой, на которой задается местоположение эксплуатационных и наблюдательных скважин. Условия на границах, геометрические размеры и количество водоносных горизонтов устанавливаются на основании данных геолого-гидрогеологических работ. Фильтрационная среда принимается кусочно-однородной. Границы смены фильтрационных свойств выделяют по геолого-тектоническим признакам и контролируются наблюдательной сетью. То есть, каждый элемент среды должен быть охарактеризован режимом хотя бы одной наблюдательной скважины. Очень полезными здесь могут оказаться данные сейсморазведки, тогда выделение блоков будет более обоснованным.

Решения задачи начинается по схеме снизу-вверх. При этом принимается допущение, что подпитка из недр в самый нижний изучаемый горизонт, не происходит или же ей можно пренебречь. Процедура решения

задачи представляет собой однотипный алгоритм, который реализуется в несколько этапов по следующей схеме.

1. На первом этапе в модель вводятся гидродинамические параметры смежных водоносных горизонтов, полученные по результатам опытно-фильтрационных работ. 2. На модели воспроизводится фактический режим эксплуатации, и для каждого из выбранного набора параметров в интересующем диапазоне временного интервала, определяют понижение уровня в блоках, моделирующих наблюдательные скважины (для нижнего водоносного горизонта). Далее, сопоставляя модельные и фактические понижения на одноименные моменты времени, рассчитывается среднее значение стандартного отклонения ( $\delta$ ).

Здесь следует уточнить о какой ошибке идет речь. Дело в том, что информация, собранная в полевых условиях не отличается высокой точностью по целому ряду причин, и чтобы получить более объективные оценки, сопоставляются не единичные точки, а средняя погрешность за весь временной интервал для выбранного набора параметров.

3. Если полученные решения изобразить графически, то для каждого параметра ( $b_n$ ) можно построить унимодальную поверхность, изображенную на рис.3.12. Проекция точек поверхности, имеющих минимальные погрешности, на плоскость  $km \div \mu^*$ , дает некоторую кривую АВ, у которой в точке С будет наблюдаться наименьшее из всех значение стандартной ошибки. То есть, для каждого фиксированного параметра перетекания ( $b_i$ ) найдется свое соотношение водопроницаемости и водоотдачи, обеспечивающих минимум погрешности. Выполнив аналогичные расчеты для нескольких выбранных произвольно параметров перетекания ( $b_i$ ), получим несколько подобных линий, на одной из которых находится искомое решение, которое будет располагаться в точке, соответствующей минимуму среднеквадратической погрешности ( $\delta = \min$ ), рис.6.

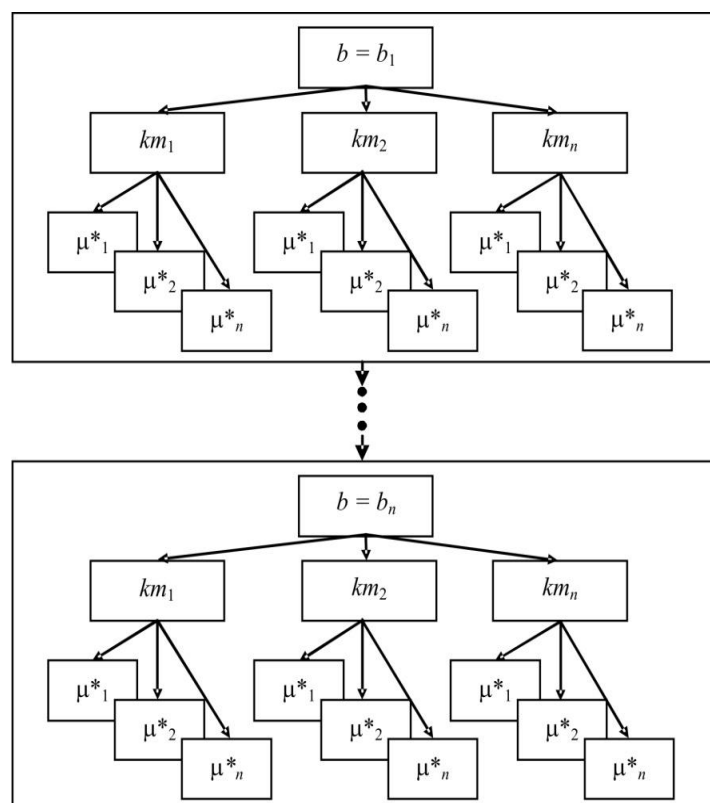


Рис.7. Схема задания параметров модели при направленном поиске

Решение можно также найти, если указанные поверхности спроецировать на плоскости  $km \div \delta$ , и  $\mu^* \div \delta$ . Тогда получится серия кривых, имеющих экстремум в некоторой точке.

## Практическое занятие 7

### *Математическая модель Куюлусского месторождения*

Исходя из описания, следует рассматривать многопластовую схему с перетеканием между первым альбским и сеноманским водоносным горизонтами. Второй альбский горизонт может рассматривать как изолированный. Учитывая, что практически 90% водоотбора приходится на первые два, в работе рассматривалась двух пластовая плоско пространственная модель. Второй альбский горизонт, характеризующийся хорошей гидравлической изоляцией от вышележащих, в расчетах не учитывался. Кроме того, достаточно точная и представительная информация по скважинам режимной сети имеется только для первого альбского горизонта. Динамика уровня охарактеризована в нем по шести точкам

(скважинам), в связи с чем верификация модели выполнялась только для первого альбского горизонта.

Рассматривалась плоско-пространственная математическая модель, описываемая дифференциальным уравнением:

$$\mu^* \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( km_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( km_y \frac{\partial S}{\partial y} \right) - b_k (S_k - S) - b_n (S_n - S)$$

где:  $S$  – понижение уровня в рассматриваемом водоносном горизонте;  $S_k$ ,  $S_n$  – понижение уровня в водоносных горизонтах, залегающих над кровлей и в подошве рассматриваемого соответственно.

Вся область фильтрации была разбита неравномерной прямоугольной сеткой с шагом 5000×5000 м. в центральной части и 5000×10000 м - на периферии. Исходя из геологического строения, рассматривалась схема полуограниченного пласта. Северная граница модели задана как непроницаемая (ГУ II). В остальных направлениях модель принята как неограниченная. В вертикальном разрезе границы на кровле сеноманского и подошве первого альбского приняты также как ГУ II, между сеноманским и первым альбским горизонтами - как границы ГУ III.

Фильтрационная область разбита на шесть кусочно-однородных зон, в пределах которых параметры модели приняты постоянными по пространственным координатам.

Параметры модели в первоначальном варианте приняты по результатам опытно-фильтрационных работ, режим водоотбора задан ступенчатым, в соответствии с фактическими среднегодовыми значениями.

Параметры сеноманского горизонта приняты постоянными равными: водопроводимость – 35 м<sup>2</sup>/сут; водоотдача – 0,0001. Перетекание между горизонтами отсутствует.

Начальные условия – стандартные:  $t = 0$ ;  $Q = 0$ ;  $S = 0$ .

Сопоставление модельных с фактическими понижениями по наблюдательным скважинам показало, что по некоторым скважинам расхождения достигают двукратной величины. С целью повышения точности решения задачи использовалась методика верификации, изложенная в главе 3. Итерационный процесс осуществлялся последовательно от зоны I к зоне VI. Принимая параметры водоносного горизонта по схеме рис. 3.14. производилось моделирование для каждого набора выбранных параметров, и рассчитывалась среднеквадратичная погрешность. Для верификации использовался фрагмент режима за период 1964–1972 гг. Результат обработки цифрового материала с целью сокращения объема вычислений, представлены только по скв. № 47-г (зона I) для параметра перетекания  $b = 10^{-6}$  сут<sup>-1</sup> (итерация 2). В таблицу внесены также квадраты отклонений модельных и фактических данных и среднеквадратическая погрешность.



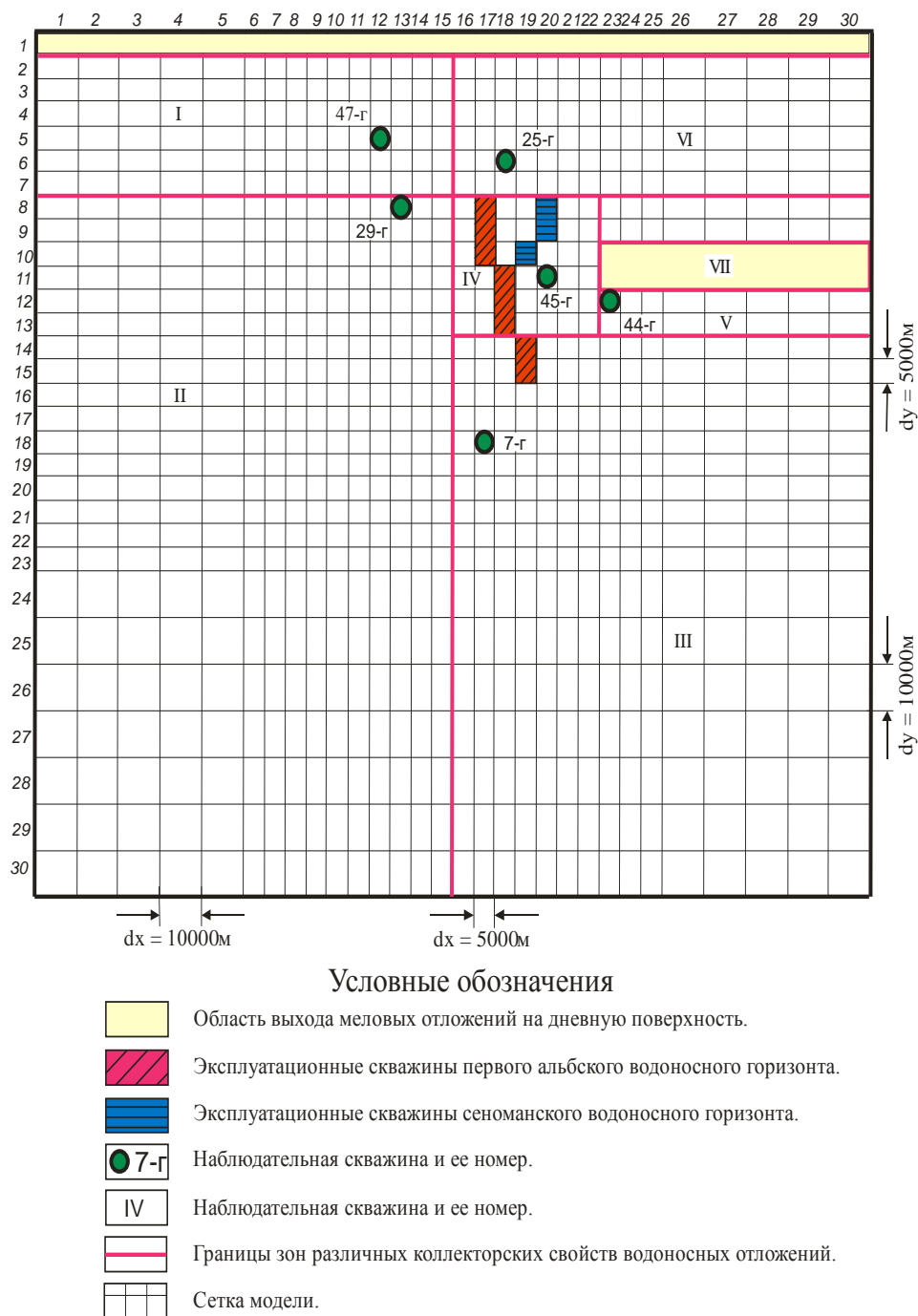


Рис.7 Филтративная схема Куюлусского месторождения артезианских вод.

По данным таблицы построены графики в координатах  $Lg(\delta) \div km$  и  $Lg(\delta) \div \mu^*$ , которых по минимуму погрешности определены параметры горизонта.

Результаты моделирования с параметрами, установленными после второго цикла итерации, представлены в таблице, и изображены на рис. 8

Таблица

Модельные понижения уровня по скважине № 47-г. при  $b = 10^{-6} \text{ м}^{-1}$

$t$ , год	$t$ , сут	$S_{\text{факт}}$	$km$	$S$ мод, м.	При $\mu^* =$	$\Delta = (S_{\text{факт}} - S_{\text{мод}})^2$	при $\mu^* =$
-----------	-----------	-------------------	------	-------------	---------------	---	---------------

		м.	м²/сут	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004
1964	365	1,9	95	1,22	0,77	0,51	0,35	0,462	1,277	1,932	2,403
1966	1095	5,1		8,05	6,36	5,19	4,33	8,70	1,588	0,008	0,593
1968	1825	10,9		15,33	12,77	10,89	9,46	19,63	3,497	0,000	2,074
1970	2555	17,9		23,58	20,28	17,75	15,74	32,26	5,664	0,022	4,666
1972	3285	25,3		31,8	27,86	24,74	22,22	42,25	6,554	0,314	9,486
ΣΔ								103,3	18,58	2,276	19,221
δ = √(ΣΔ/n)								4,54	1,928	0,675	1,961
Lg(δ)								0,658	0,285	-0,171	0,292
1964	365	1,9	115	1,31	0,85	0,58	0,41	0,348	1,103	1,742	2,220
1966	1095	5,1		8,22	6,57	5,42	4,56	9,734	2,161	0,102	0,292
1968	1825	10,9		15,48	12,98	11,15	9,73	20,98	4,326	0,063	1,369
1970	2555	17,9		23,64	20,45	17,98	16,02	32,95	6,503	0,006	3,534
1972	3285	25,3		31,77	27,97	24,95	22,49	41,86	7,129	0,123	7,896
ΣΔ								105,8	21,22	2,036	15,311
δ = √(ΣΔ/n)								4,60	2,060	0,638	1,750
Lg(δ)								0,66	0,314	-0,195	0,243
1964	365	1,9	135	1,39	0,92	0,65	0,47	0,26	0,960	1,563	2,045
1966	1095	5,1		8,33	6,72	5,58	4,73	10,43	2,624	0,230	0,137
1968	1825	10,9		15,57	13,12	11,32	9,93	21,81	4,928	0,176	0,941
1970	2555	17,9		23,62	20,53	18,12	16,2	32,72	6,917	0,048	2,890
1972	3285	25,3		31,66	27,98	25,04	22,64	40,45	7,182	0,068	7,076
ΣΔ								105,7	22,61	2,085	13,088
δ = √(ΣΔ/n)								4,597	2,127	0,646	1,618
Lg(δ)								0,662	0,328	-0,190	0,209
1964	365	1,9	155	1,45	0,99	0,71	0,52	0,203	0,828	1,416	1,904
1966	1095	5,1		8,50	6,90	5,77	4,92	11,56	3,240	0,449	0,032
1968	1825	10,9		15,77	13,37	11,58	10,19	23,72	6,101	0,462	0,504
1970	2555	17,9		23,81	20,78	18,41	16,52	34,93	8,294	0,260	1,904
1972	3285	25,3		31,81	28,24	25,35	22,99	42,38	8,644	0,003	5,336
ΣΔ								112,8	27,11	2,590	9,681
δ = √(ΣΔ/n)								4,749	2,328	0,720	1,392
Lg(δ)								0,677	0,367	-0,143	0,143

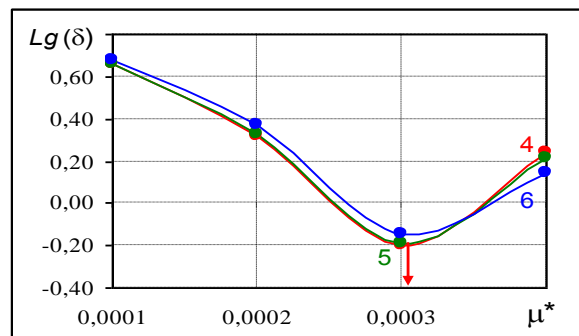
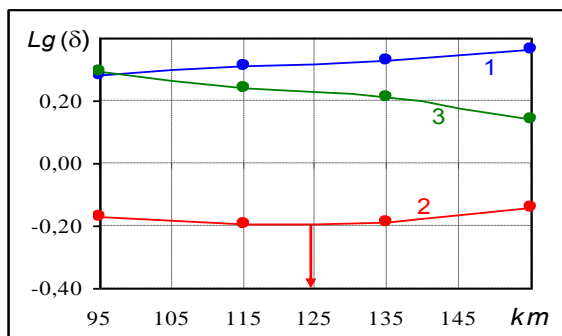


Рис.8 Зависимость логарифма стандартной ошибки от параметров пласта ( $b=10^{-6}$ сут $^{-1}$ ).

1 –  $\mu^* = 0,0002$ ; 2 –  $\mu^* = 0,0003$ ; 3 –  $\mu^* = 0,0004$ ;  
4 –  $km = 115$ ; 5 –  $km = 135$ ; 6 –  $km = 155$  м<sup>2</sup>/сут.

Таблица

Параметры модели после итерационных циклов.

Блоки модели			Итерация 1			Итерация 2		
№ скв.	Координаты углов (левый верхний, правый нижний)	Коорд. скважин $I - J$	$km, m^2/сут.$	$\mu^*$	$b, сут^{-1}$	$km, m^2/сут$	$\mu^*$	$b, сут^{-1}$
7-г	2 – 11	12 – 5	95	0,0002	0,000000	125	0,00030	0,000001
	7 – 15							
25-г	2 – 16	18 – 6	95	0,0002	0,000001	100	0,00020	0,000001
	7 – 30							
29-г	8 – 1	13 – 9	70	0,0001	0,000002	60	0,00010	0,000002
	30 – 15							
44-г	8 – 23    9 – 30	23 – 12	250	0,005	0,000002	350	0,00300	0,000004
	12 – 23    13 – 30							
45-г	8 – 16	20 – 11	100	0,0001	0,000002	110	0,00020	0,000003
	13 – 22							
7-г	14 – 16	17 – 18	40	0,0001	0,000000	30	0,00008	0,000000
	30 – 30							

## Практическая работа 8

### Архызское месторождение подземных вод

Месторождение пресных питьевых вод расположено по левому борту реки Зеленчук и приурочено к переуглубленной древней долине голоценового возраста. Водовмещающими отложениями являются аллювиальные и флювиогляциальные терригенные отложения, представленные валунами, галькой, глинами и песками. Рельеф территории горный, характеризуется глубоким эрозионным врезом в коренные породы каменноугольной и пермской систем, сложенные конгломератами, гравелитами, песчаниками, аргиллитами. В гидрогеологическом плане рассматриваемый объект представляет собой систему, состоящую из двух водоносных горизонтов: верхний - безнапорный водоносный горизонт нижнеголоценовых аллювиально-флювиогляциальных отложений второй надпойменной террасы; нижний – верхнеплейстоцен-голоценовый водоносный подгоризонт аллювиально-флювиогляциальных и озерных отложений. В целом это близкие по составу литологические разности, характеризующиеся довольно высокой неоднородностью и изменчивостью, как в плане, так и в разрезе. Водоупорные отложения, разделяющие толщу на два более или менее самостоятельных горизонта, довольно относительно и не выдержаны по мощности. Тем не менее, между горизонтами отмечается существенная разница в статических напорах, достигающая в некоторых скважинах 20 метров и более, характеризующаяся к тому же инверсией. То есть, нижний

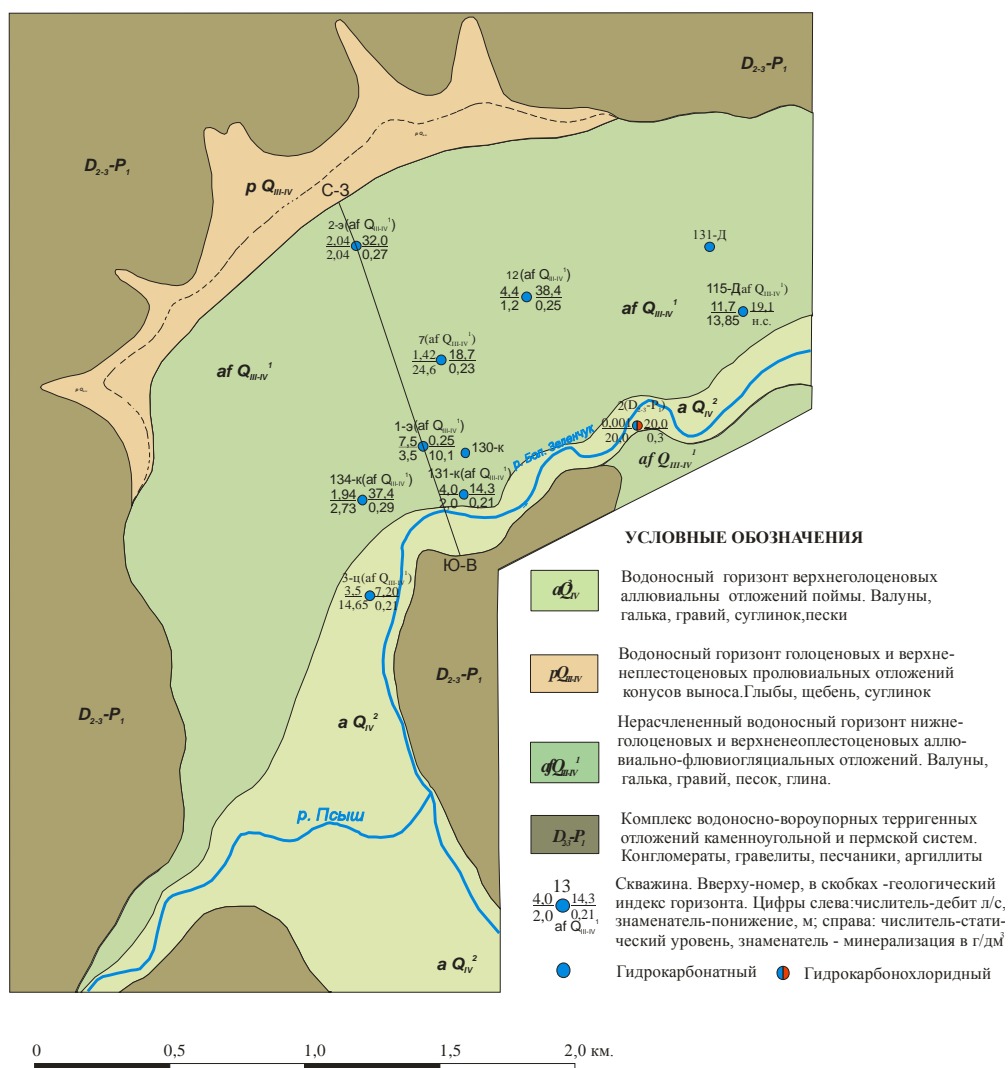


Рис. 9. Схема Архызского месторождения подземных вод.

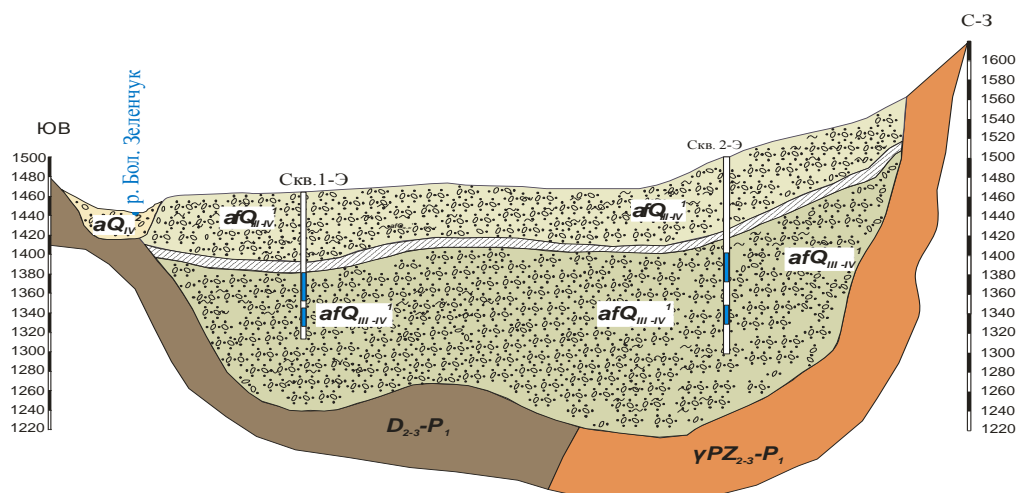


Рис. 10 Геологический разрез по Архызскому месторождению подземных вод.

горизонт имеет более низкие отметки уровня, чем верхний. Эти особенности объясняются морфологией рельефа, геолого-гидрогеологическими и гидрологическими условиями объекта. Нижнеголоценовый водоносный горизонт, располагаясь выше местного базиса эрозии, имеет

преимущественное питание за счет инфильтрации атмосферных осадков и конденсации водяных паров, величина которой в горных районах, из-за большого перепада дневных и ночных температур, весьма существенна. Разгрузка горизонта осуществляется в русло реки Зеленчук. Соответственно и форма гидроизогипс представляет собой радиально сходящийся поток, с падением гидравлических градиентов в сторону р. Зеленчук. Нижний (верхнеплейстоцен-голоценовый) горизонт имеет преимущественное питание из реки, поскольку сверху он перекрыт толщей относительно водоупорных отложений, и вертикальный нисходящий водообмен затруднен.

Исходя из представленного краткого описания, модель должна представлять собой двухслойную толщу, разделенную относительно водоупорными отложениями, на два водоносных горизонта. Верхний горизонт является грунтовым, нижний – слабонапорным. Между горизонтами имеется гидравлическая связь, характеризующаяся параметром перетекания. Верхний горизонт имеет инфильтрационное питание за счет атмосферной влаги и поверхностного стока с овражной сети. Граничные условия следующие: Южная граница, где сходятся реки Псыш и Б. Зеленчук, представляет собой границу первого рода. Западная, северная и восточная границы, в силу выклинивания водоносных горизонтов, принимаются как закрытые, или ГУ II. Юго-восточная, проходящая по реке Б. Зеленчук рассматривается как ГУ I.

Решение задачи предполагается проводить численным методом на дискретной модели. Рассматривается плоско-пространственная модель, для которой система дифференциальных уравнений, описывающих процесс геофильтрации, условий имеет вид:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial \dot{H}}{\partial t} = kh_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + kh_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + b_k (H - H_k) \\ \mu^* \frac{\partial H_k}{\partial t} = km_x \frac{\partial^2 \dot{H}_k}{\partial x^2} + km_y \frac{\partial^2 \dot{H}_k}{\partial y^2} + b_k (\dot{H}_k - H) \end{cases}$$

где  $H$  – положение статического уровня в водоносных горизонтах (индексом  $k$  помечены напоры нижнего водоносного горизонта);  $k, h$  – соответственно коэффициент фильтрации и статический напор (мощность) грунтового горизонта;  $km$  – водопроводимость нижнего горизонта;  $\mu^*, \mu$  – упругая и гравитационная водоотдача;  $x, y$  – пространственные координаты по соответствующим осям;  $t$  – текущее время;  $b_k$  – параметр перетекания.

Уравнение дополняется условиями однозначности. Начальные условия формируются в следующем виде:  $t = 0, Q = 0, H = H_{cm}$ , где  $H_{cm}$  – статический уровень в водоносных горизонтах.

### ***Методика моделирования***

Решение выполнялось численным методом. Это означает, что вместо дифференциальных уравнений в частных производных решается аналогичная система конечно-разностных уравнений, в которых дифференциалы искомой функции представлены в дискретной форме по координатам пространства и времени. Чтобы получить такую модель, исследуемая область разбивалась равномерной сеткой на элементарные сопряженные блоки с шагом по пространственным координатам  $\Delta x$  и  $\Delta y$  и все физические характеристики объекта в пределах выделенного блока, относились к его центру тяжести (узловой точке). То есть, вместо непрерывного изменения функции во времени и пространстве рассматривались изменения ее в отдельных точках и через определенные дискретные моменты времени  $\Delta t$ .

Задача решалась в два этапа. На первом выстраивалась естественная пьезометрическая поверхность зеркала подземных вод для каждого горизонта при нулевом значении дебитов эксплуатационных скважин. На втором этапе, после построения естественной поверхности уровня водоносных горизонтов, производилось моделирование работы скважин с заданными нагрузками.

Учитывая, что естественный режим фильтрации является стационарным, для первого уравнения системы можно записать:

$$\left( \frac{kh_{i-1}(\dot{I}_{i-1,j} - \dot{I}_{j,i}) - kh_{i+1}(\dot{I}_{i,j} - \dot{I}_{i+1,j})}{\Delta x^2} \right) + \left( \frac{kh_{j-1}(\dot{I}_{i,j-1} - \dot{I}_{i,j}) - kh_{j+1}(\dot{I}_{i,j} - \dot{I}_{i,j+1})}{\Delta y^2} \right) = -W_k \quad ($$

где  $W_k = b_k(\dot{I}_{k,i,j} - \dot{I}_{i,j})$  – глубинный вертикальный водообмен между водоносными горизонтами. В данной постановке принимается, что подпитка нижнего горизонта из палеозойского фундамента ничтожно мала, и ей можно пренебречь, рассматривая границу между фундаментом и верхнеплейстоцен-голоценовым подгоризонтом как закрытую.

Рассматривая пласт как кусочно-однородный, со средним значением  $km$ , для нижнего пласта (при равномерной дискретизации пространства  $\Delta x = \Delta y$ ), можно записать:

$$W_k = -km_k \left( \frac{\dot{I}_{i-1,j} + \dot{I}_{i+1,j} + \dot{I}_{i,j-1} + \dot{I}_{i,j+1} - 4\dot{I}_{i,j}}{\Delta x^2} \right), \quad \text{а при известном напоре в}$$

верхнем горизонте ( $H_{k,i,j}$ ):

$$W_k = -km_k \left( \frac{\dot{I}_{i-1,j} + \dot{I}_{i+1,j} + \dot{I}_{i,j-1} + \dot{I}_{i,j+1} - 4\dot{I}_{i,j}}{\Delta x^2} \right) = b_k(H_{i,j} - H_{k,i,j})$$

откуда можно определить параметр перетекания.

Если подобным образом провести расчеты для всех блоков и водоносных горизонтов, и вычислив параметры перетекания при принятых значениях водопроводимости, ввести их в модель вместе со статическими напорами, то полученное решение будет отвечать стационарной модели, или начальным условиям в принятой постановке.

Преимущества данной методики заключается в том, что для построения начального варианта модели требуется знание всего одного параметра – коэффициента фильтрации (или коэффициента проводимости). Этот параметр наиболее точно из всех остальных определяется по результатам опытно-фильтрационных работ, что гарантирует относительно высокую точность математических построений.

Практически задача решалась следующим образом.

1. Вся область фильтрации разбивалась равномерной сеткой с шагом по плановым координатам  $\Delta x = \Delta y = 50$  м (всего  $68 \times 60$  ячеек). На сетку по координатам наносились контуры месторождения и принятые условия на границах, рис. 5.4.

2. По данным буровых и геологоразведочных работ определялось глубинное строение и условия залегания водоносных и водоупорных отложений, которые отображались на модели в виде изолиний.

3. По данным опытно-фильтрационных исследований одиночных и кустовых откачек определялись параметры, характеризующие емкостные и фильтрационные свойства отложений. В модели приняты средние значения коэффициентов фильтрации и емкости. Для верхнего горизонта  $k_{\phi} = 5,2$  м/сут;  $\mu = 0,022$ ; для нижнего –  $k_{\phi} = 6,0$  м/сут;  $\mu^* = 0,015$ .

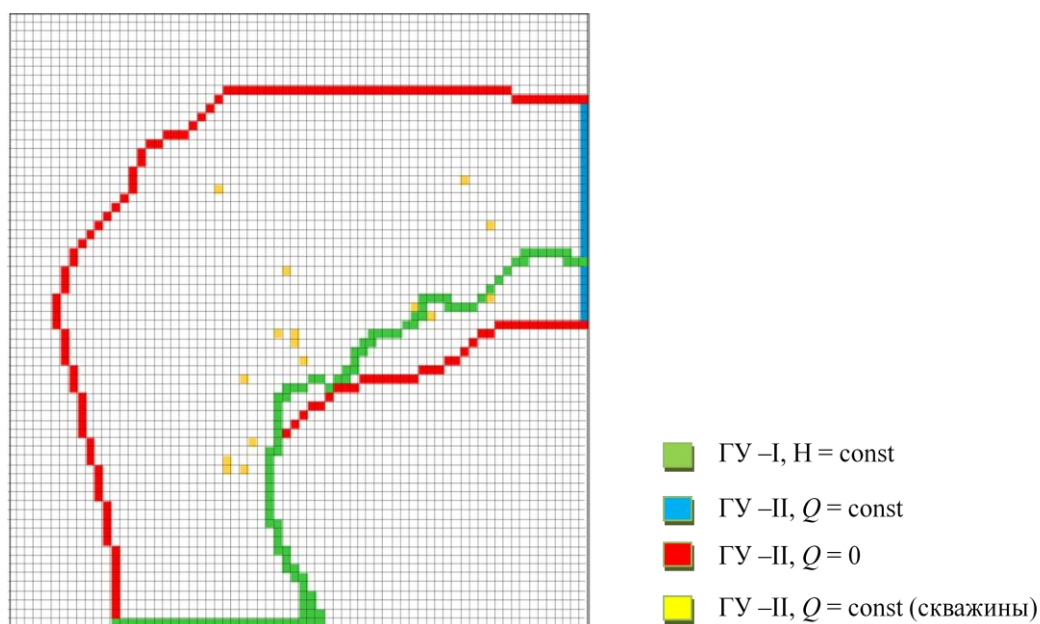


Рис.11. Схема граничных условий модели

4. Для дальнейшего построения модели, водоносные горизонты принимались изолированными в кровле и подошве, то есть, принималось  $b_k = 0$ , и по формуле рассчитывалось глубинное питание  $W_k$  для всех горизонтов.

5. Полученные расчетным путем значения  $W_k$  вводились в модель в каждый блок виде нагрузки равной  $Q = W_k \times \Delta x \times \Delta y$  в каждый горизонт, которые пока еще изолировались в разрезе. Затем производилось моделирование при достаточно большом времени  $t$ . Если расчеты

выполнены корректно, то первоначальное положение пьезометрической поверхности в каждом горизонте должно быть неизменным.

## Практическая работа № 9 . Кисловодское месторождение минеральных вод

### . Краткое геолого-гидрогеологическое строение

Кисловодское месторождение лечебных углекислых минеральных вод является одним из важнейших месторождений региона Кавказских минеральных вод. Воды используются для бальнеологического питья, лечебных процедур, а также для промышленного розлива. В пределах месторождения выделяются 4 участка (рис. 12), содержащие минеральные воды кондиционного

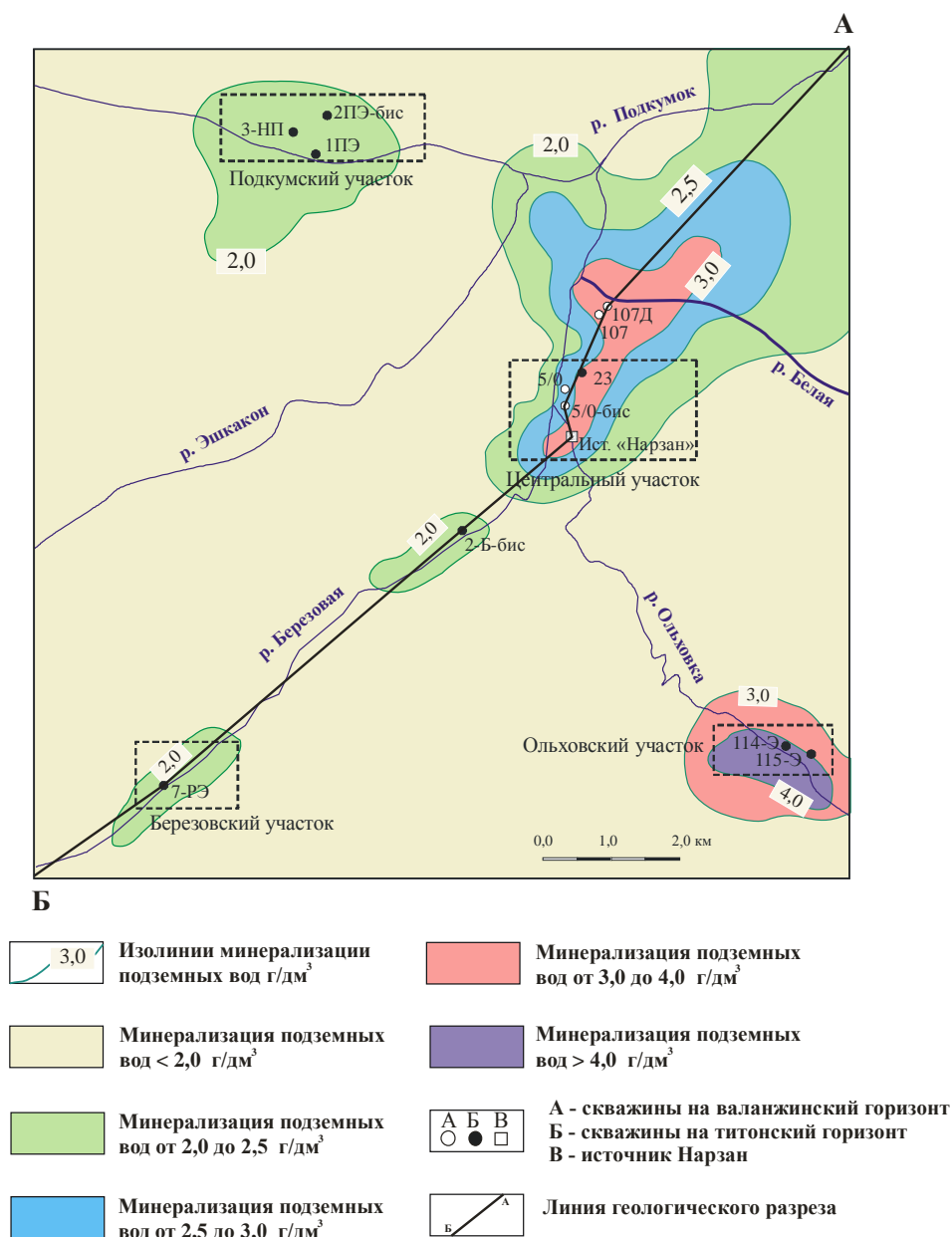




Рис12. Схема Кисловодского месторождения минеральных вод

состава, отвечающего ГОСТ 13273-88 «Воды минеральные, лечебные и лечебно-столовые».

Рабочим горизонтами месторождения являются титонский и валанжинский водоносные горизонты. Последний, в силу выраженной гидрогеохимической зональности, подразделяется на два подгоризонта: верхний и нижний. Геолого-гидрогеологический разрез через Кисловодское месторождение представлен на рис.13

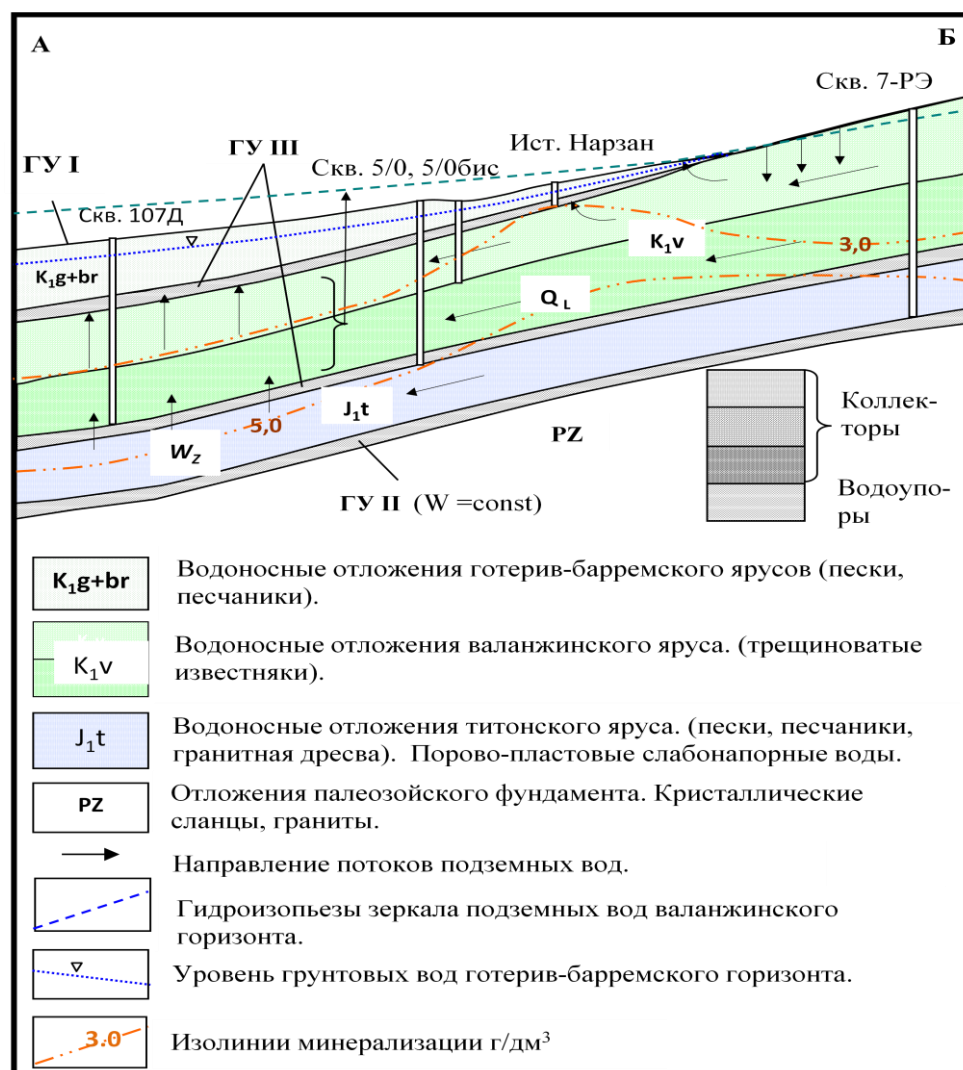


Рис.13. Геолого-гидрогеологический разрез Кисловодского месторождения минеральных вод

По действующей классификации месторождение относится к четвертой группе сложности (самые сложные). Сложность заключается в высокой плановой и вертикальной неоднородности фильтрационных свойств водовмещающих пород, наличием тесной гидравлической связи между горизонтами, пестрым и неоднородным минеральным составом подземных вод, напорно-безнапорным режимом фильтрации. В таких случаях при

подсчете запасов рекомендуется применение гидравлических методов оценки, что особых возражений не вызывает. Гидравлические методы основаны на фактических наблюдениях за динамикой изменения эксплуатационных показателей, достаточно точны, просты, не требуют большого объема информации, но имеют и ряд недостатков. Гидравлика не раскрывает физики процесса, не позволяет установить балансовые составляющие подземного потока, имеются сложности и с прогнозированием минерального состава. В этой связи, представляется целесообразным комплексирование методов гидравлики и математического моделирования. Конечно, моделирование использует более сложный вычислительный аппарат, требует значительно большего объема информации, однако для месторождений имеющих важное хозяйственное значение, это небольшая плата, а подсчет запасов двумя различными методами, существенно повышает точность прогнозных оценок.

### ***Математическая модель объекта***

Рассматривалась двухслойная плоско-пространственная модель: титонский и нижневаланжинский водоносные горизонты, разделенные относительно водоупорными отложениями. Начальные условия формулировались в следующей постановке:  $t = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $H = H_{cm}$ ,  $m = m_0$ . Система дифференциальных уравнений имеет вид [1]:

$$\begin{cases} \mu^* \frac{\partial H}{\partial t} = km_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + km_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + b_{k-1}(H_{k-1} - H) + b_{k+1}(H_{k+1} - H) \\ n \frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - V_x \frac{\partial C}{\partial x} - V_y \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{V_{zn} - V_{zk}}{m} C - W_R \end{cases}$$

где:  $H_{cm}$  – статическое положение пьезометрического уровня;  $m_0$  – начальная минерализация подземных вод;  $\mu^*$  – водоотдача;  $b_k, b_n$  – параметр перетекания относительно водоупорного пласта, залегающего в кровле и подошве;  $H_k, H_n$  – напоры в смежных водоносных горизонтах: кровле и подошве соответственно;  $km$  – водопроводимость пласта;  $m$  – мощность водоносного горизонта;  $n$  – активная пористость;  $V_x, V_y$  – компоненты скорости фильтрации по соответствующим координатам;  $V_{zn}, V_{zk}$  – скорости перетекания воды через кровлю и подошву пласта соответственно;  $D_x, D_y$  – коэффициент гидродинамической дисперсии;  $C$  – концентрация исследуемого компонента;  $W_R$  – параметр, характеризующий интенсивность внутрипластовых обменных процессов.

Граничные условия модели следующие. Южная граница. Отложения выходят на поверхность, это область развития грунтовых вод и область инфильтрационного питания. В силу высокой гравитационной водоотдачи, граница может рассматриваться как ГУ I. В остальных направлениях водоносные горизонты имеют большую протяженность. Размеры модели могут быть ограничены в этих направлениях величиной равной 2–4 кратному радиусу влияния скважины.

Построение модели осуществлялось поэтапно.

После того как были установлены скорости фильтрации выполнялось построение стационарного геохимического поля распределения минерализации. Учитывая высокие скорости фильтрации, в рассматривался только конвективный перенос, то есть, во втором уравнении системы принималось  $D_x = D_y = 0$ , тогда его можно переписать в следующем виде:

$$0 = -V_x \frac{\partial C}{\partial x} - V_y \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{V_{zn} - V_{zk}}{m} C - W_R$$

В дискретной форме имеет вид:

$$W_{R_i} = -V_x \frac{C_{i-1} - C_{i+1}}{2 \cdot \Delta x} - V_y \frac{C_{j-1} - C_{j+1}}{2 \cdot \Delta y} - \frac{V_{zn} - V_{zk}}{m} C_i$$

В модель были введены также значения минерализации подземных вод, инфильтрационного питания, полученные непосредственно из натурных наблюдений, и выполнено моделирование естественного поля распределения минерализации. Результаты моделирования представлены на рис.14.

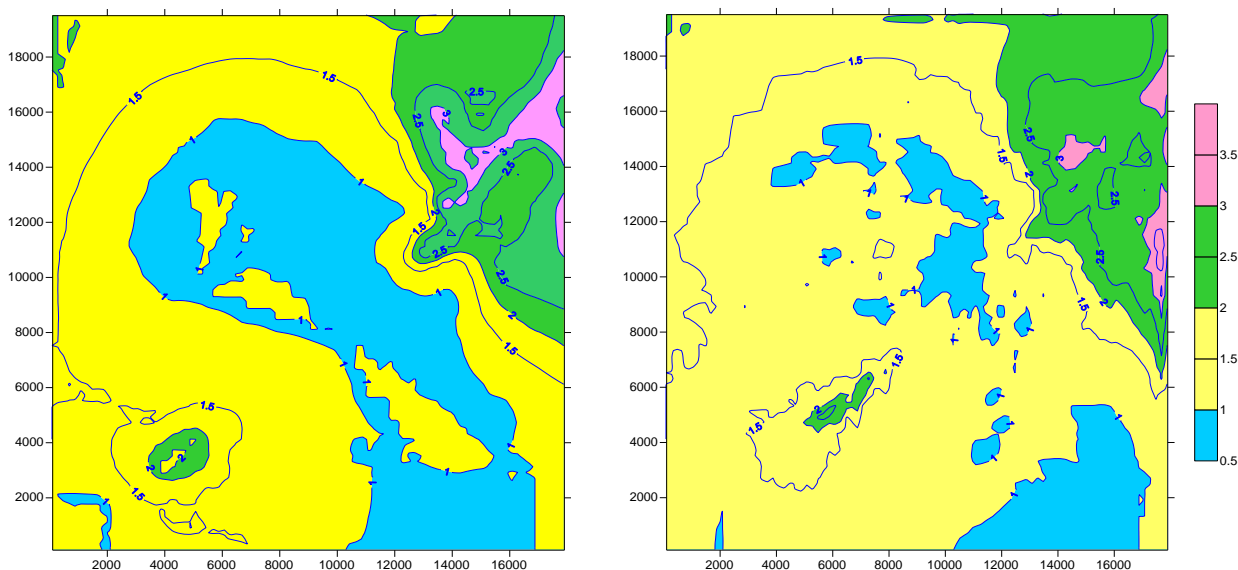


Рис.14. Схема распределения минерализации подземных вод  
(а) – фактическая, (б) – модельная (при  $t = 5$  лет).

На рис. 15 представлена схема абсолютной погрешности фактических и модельных значений минерализации.

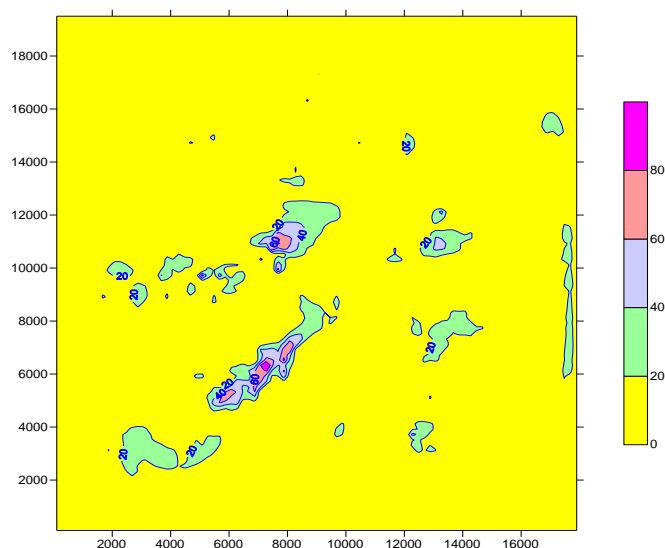


Рис..15. Схема распределения абсолютной ошибки (%) фактической и модельной минерализации.

В целом погрешность не превышает 20%, что для данных условий можно считать как хороший результат, однако в некоторых блоках ошибка достигает до 100%. Это связано с логическими несоответствиями математических расчетов. Дело в том, что в силу дороговизны гидрогеологической информации, построение карт приходится выполнять по ограниченному количеству точек (скважин), используя методы интерполяции. По этой причине в некоторых блоках (с максимальными градиентами параметров) возникает несоответствие направлений перетоков и значений минерализации, что естественно отражается и на точности построений. Для таких блоков необходимо вводить дополнительную корректировку напоров и минерализации, или же выполнять расчеты в приращениях.