Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ В ФИЗИЧЕСКОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

Методические указания к лабораторным работам

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2014

УДК 530.10

ОБЩАЯ ФИЗИКА. Оценка точности измерений в физическом эксперименте: Методические указания к лабораторным работам / Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». Сост.: *Е.С. Ломакина,* СПб, 2014. 21 с.

Изложены основные принципы оценки погрешностей в ходе обработки результатов экспериментов, выполняемых при изучении всех частей курса общей физики. Методические указания имеют своей целью ознакомление с основными понятиями неопределенности и погрешности, методами физических измерений, вычисления погрешностей измерения и оценки точности результатов измерений.

Предназначено для студентов специальности направления 270800 и специальности 210601.

Научный редактор доц. Ломакина Е.С.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие науки и техники неразрывно связано с точными измерениями, которые дают новую информацию об окружающем физическом мире, обеспечивают технические возможности производства прецизионных устройств, получения сверхпрочных материалов, создания микроэлектронных приборов. В центре этой деятельности находится инженер, главный двигатель технического прогресса. Специфика его работы требует владения современной измерительной аппаратурой, знания основных приемов и способов измерений, обработки и интерпретации экспериментально полученных данных. Первый шаг к практической работе в этой области совершают в учебной лаборатории физики

Предваряя последующее изложение, рассмотрим вначале содержание понятий физической величины и измерения, как способа определения ее значения. Это тем более важно, что данные понятия не единожды встретятся в пособии.

ВИДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

В эксперименте свойства физических явлений и объектов изучаются с помощью измерений соответствующих физических величин. Измерить какую-либо физическую величину значит сравнить ее с другой однородной ей физической величиной, принятой за единицу меры. За единицу меры длины, например, принят 1 метр, массы – 1 кг и др. При измерении физических величин пользуются, разумеется, не эталонами, которые хранятся в специальных государственных метрологических учреждениях, а измерительными приборами, которые тем или иным способом сверены с эталонами.

Виды измерений определяются физическим характером измеряемой величины, требуемой точностью измерения, необходимой скоростью измерения, условиями и режимом измерений и т.д.

По количеству проводимых опытов, например, измерения можно разделить на многократные и однократные. Измерения называют однократными, когда для получения значения некоторой физической величины в опыте проводят только одно измерение. Измерения называют многократными, если для получения значения физической величины выполняют несколько измерений одними и теми же приборами при одних и тех же условиях.

По способу получения результата в учебной физической лаборатории обычно выделяют прямые (непосредственные) и косвенные измерения. При прямых измерениях искомое значение физической величины определяют соответствующим физическим прибором (непосредственное сравнение с эталоном). Например, длину измеряют непосредственно линейкой, температуру – термометром, силу – динамометром и т.д. Если искомое значение физической величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, найденными прямыми измерениями, то этот вид измерений называют косвенными. Например, объем параллелепипеда может быть найден путем умножения трех линейных величин (длины, ширины и высоты), которые в свою очередь измеряются непосредственно.

По условиям измерений различают равноточные и неравноточные измерения. Если измерения какой-либо физической величины выполняются одинаковыми по точности приборами в одних и тех же условиях с одинаковой тщательностью, такие измерения считают равноточными. Измерения, выполненные различающимися по точности приборами и (или) при разных условиях, называют неравноточными. В учебной физической лаборатории, как правило, все измерения являются равноточными. Это связано с фиксированным набором приборов и ограниченным временем выполнения работ лабораторного практикума. Измерения, проводимые при выполнении лабораторных работ можно характеризовать как равноточные, многократные или однократные, прямые или косвенные, выполняемые с использованием различных методов измерений.

Лабораторные измерения всегда обладают некоторой неточностью (погрешностью), оценка которой является неотъемлемой составляющей любого экспериментального исследования.

ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Опыт показывает, что вследствие неточности измерительных приборов, несовершенства наших органов чувств, неполноты наших знаний, трудности учета всех побочных явлений, при многократном повторении одного и того же измерения получаются разные числовые значения изучаемой физической величины. Так бывает, даже если измерения производить в совершенно одинаковых условиях (равноточные измерения). При практическом использовании результатов тех или иных измерений возникает вопрос об истинном значении изучаемой физической величины, о точности измерения.

Термин «точность измерения», т.е. степень приближения результатов измерения к некоторому действительному значению, используется для качественного сравнения измерительных операций. Для количественной оценки используется понятие «погрешность (ошибка) измерений». Эти термины тесно связаны друг с другом: чем меньше погрешность, тем выше точность. Оценка погрешности измерений – одно из важных мероприятий по обеспечению достоверности измерений.

Погрешность измерения – это отклонение результата измерений x от истинного 0 x (действительного) значения измеряемой величины. В зависимости от формы представления различают абсолютную, относительную и приведенную погрешности измерений. При измерениях любой величины мы никогда не получаем ее истинного значения. Это объясняется принципиальной невозможностью устранить все посторонние влияния на процесс измерения. Иначе говоря, при всяких измерениях мы допускаем ошибки; их величину принято характеризовать абсолютной погрешностью измерений Δx и относительной погрешностью ε. Относительной погрешностью измерений называют отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0}.$$

Так как x_0 – величина неизвестная, то на практике x_0 заменяют найденным из опыта среднеарифметическим значением $<x>$, поэтому

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{< x >} . \qquad (1.1)$$

Относительную погрешность часто выражают в процентах.

Пример 1. При измерении длины детали А были вычислены среднее значение $l_{ср}$=10,00 мм и абсолютная погрешность Δl=0,01 мм. В этом случае относительная погрешность составляет δ=0,001 или $\delta_{\%}$=0,1%.

Таким образом, *задача всякого измерения состоит из нахождения наиболее вероятного значения измеряемой величины и оценки абсолютной и относительной погрешности.*

ПОГРЕШНОСТИ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Принято различать три типа погрешностей прямых измерений: *промахи, систематические погрешности и случайные погрешности*.

1. *Промахи* - грубые ошибки, существенно превышающие ожидаемую при данных условиях погрешность. Они вызываются невнимательностью экспериментатора, использованием неисправных приборов и т.д. Как правило, промахи быстро выявляются; наблюдения, содержащие их, следует отбрасывать, как не заслуживающие доверия.

2. *Случайные погрешности* - погрешности, вызванные большим числом случайных неконтролируемых помех (сотрясением фундамента здания, изменением напряжения электрической сети, реакцией наблюдателя). В итоге при повторных наблюдениях получаются несколько отличающиеся друг от друга результаты. Исключить случайные погрешности нельзя, можно лишь оценить их величину. Это можно сделать, применяя теорию погрешностей. В основе этой теории лежат два предположения, подтверждаемые опытом:

а) при большом числе измерений случайные погрешности одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто;

б) большие (по абсолютной величине) погрешности встречаются реже, чем малые.

Именно из этих предположений следует, что при многократных измерениях величины x наиболее близким к ее истинному значению x_0 является среднее арифметическое значение:

$$\langle x\rangle=\frac{x_1+x_2+.....+x_n}{n} \quad , \qquad (1.2)$$

где n - число измерений.

Упомянутая выше теория погрешностей дает возможность найти величину случайной погрешности $\Delta x_{сл}$, т.е. расхождение между x_o и $<x>$. При этом исходят из следующих соображений.

Пусть α характеризует вероятность того, что истинное значение x_o измеряемой величины отличается от $<x>$ на величину, не большую $\Delta x_{сл}$, т.е. вероятность того, что истинное значение попадет в интервал от $<x>$ - $\Delta x_{сл}$ до $<x>+\Delta x_{сл}$ (рис.1.1). Например, если α = 0,95, то это означает, что при многократных повторениях опыта *ошибки* отдельных измерений в 95 случаях из 100 не превысят значения $\Delta x_{сл}$. Вероятность α называется доверительной вероятностью или надежностью, а интервал значений $(<x> \pm \Delta x_{сл})$ - доверительным интервалом. Как видно, $\Delta x_{сл}$ - это полуширина доверительного интервала. Ее и принимают за абсолютную случайную погрешность. Полуширину доверительного интервала принимают за абсолютную погрешность и в других случаях, например, при косвенных измерениях.

Пример 2. При измерении длины детали А получен ряд значений (мм): l_1=10,55; l_2=10,57;…; l_n=10,56. *Вычислено среднее значение* $l_{ср}$=10,56 *мм. В этом случае погрешности:* Δl_1= -0,01 *мм;* Δl_2= +0,01 *мм;…;* Δl_n= 0 *мм – являются абсолютными погрешностями.*

Задача, очевидно, состоит в том, чтобы отыскать $\Delta x_{сл}$ *при наперед заданном значении* α. *Решению этого вопроса помогает существующая между* $\Delta x_{сл}$ *и* α *математическая связь. Качественно эта связь ясна: чем с большей надежностью мы хотим указать результат данных измерений, тем больше должен быть доверительный интервал.*

В теории погрешностей в качестве единицы ширины доверительного интервала выбрана так называемая средняя квадратичная погрешность результата измерений

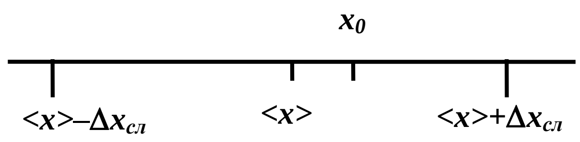

Рис. 1.1

$$\Delta S = \sqrt{\frac{\sum \left(x_i - \langle x \rangle\right)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum \Delta x_i^2}{n(n-1)}} \qquad (1.3)$$

Здесь $\langle x \rangle$ *- среднее для измеренных* n *значений* x_i (i *=1, …,* n*);*

$\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle$ - отклонение i - го наблюдения от среднего значения, n - число измерений.

Учитывая сказанное, было предложено в случае небольшого числа измерений вычислять полуширину доверительного интервала по формуле:

$$\Delta x_{сл} = t_{\alpha,n} \cdot \Delta S = t_{\alpha,n} \cdot \sqrt{\frac{\sum \Delta x_i^2}{n(n-1)}} \quad , \qquad (1.\ 4)$$

где $t_{\alpha,n}$ - некоторое, зависящее от α и n число, называемое коэффициентом Стьюдента. Зависимость $t_{\alpha,n}$ от n понятна: чем больше n, тем меньше $\langle x \rangle$ отличается от истинного значения, и тем меньше будет доверительный интервал, точнее результат измерения, а значит меньше $t_{\alpha,n}$.

3. *Систематическими* называются погрешности, которые сохраняют свою величину и знак во время эксперимента. Систематические ошибки вызываются разными причинами, односторонне влияющими на результат измерений:

- ограниченной точностью приборов (измерительных инструментов) – приборные (инструментальные погрешности);
- неправильной настройкой (неравные плечи весов, стрелка не установлена на ноль и т.д.);
- в расчетных формулах не учтено влияние некоторых второстепенных факторов (например, при взвешивании не учитывается сила Архимеда, при измерении электросопротивления не учитывается сопротивление проводящих проводов);
- округлениями, которые производятся при измерениях и вычислениях.

В большем числе случаев систематические погрешности могут быть изучены и скомпенсированы путем внесения поправок в результаты измерений. Если же сделать этого нельзя (или сложно), необходимо правильно учесть вклад систематической ошибки в общую ошибку измерений.

При выполнении лабораторных работ приходится оценивать, как правило, следующие систематические ошибки.

3.1. *Приборная (инструментальная) погрешность.* Погрешность показания прибора (например, связанная с неправильностью разбивки шкалы амперметра, линейки...) является вполне определенной. При обработке результатов измерений этот вид погрешностей задается в виде так называемой *предельной погрешности прибора (*коротко - приборной погрешности), указывающей, какова максимально возможная погрешность при использовании данного прибора. При этом для одних приборов указывается предельная абсолютная погрешность $\Delta x_{пр}$, для других (электроизмерительных, части оптических) предельная относительная погрешность (класс точности прибора k).

Классом точности прибора называется отношение предельной абсолютной погрешности к максимальному значению измеряемой прибором величины

$$k = \frac{\Delta x_{пр}}{x_{макс}} 100\,. \qquad (1.5)$$

Классов точности семь: 0,02; 0.05; 0,1; 0.5; 1; 2,5; 4. Это число указано на шкале прибора. Зная класс точности и пределы измерения прибора, можно рассчитать его предельную погрешность

$$\Delta x_{пр} = \frac{k x_{макс}}{100}\,. \qquad (1.6)$$

Если класс точности для прибора не указан, то необходимо руководствоваться следующими правилами: Абсолютная погрешность приборов с нониусом равна точности нониуса. Абсолютная погрешность приборов с фиксированным шагом стрелки равна цене деления. Абсолютная погрешность цифровых приборов равна единице минимального разряда. Для всех остальных приборов абсолютная погрешность принимается равной половине цены деления.

Приборная погрешность $\Delta x_{пр}$ представляет собой наибольшую погрешность, даваемую прибором. Действительная же погрешность прибора $\Delta x_{пр}^{ст}$ (стандартное отклонение) носит случайный характер и меньше $\Delta x_{пр}$. Строгих формул для перевода $\Delta x_{пр}$ в $\Delta x_{пр}^{ст}$ нет, чаще всего пользуются выражением

$$\Delta x_{пр}^{ст} = \frac{t_{\alpha,\infty}}{3} \cdot \Delta x_{пр}\,, \qquad (1.7)$$

где $t_{\alpha,\infty}$ - коэффициент Стьюдента при $n = \infty$.

Примечание: для электроизмерительных приборов $\Delta x_{пр}$ не зависит от значения измеряемой величины $x_{изм}$. Относительная же погрешность измерения, т.е. $\Delta x_{пр} / x_{изм}$, зависит от $x_{изм}$: чем больше $x_{изм}$, тем меньше относительная погрешность. Поэтому при измерениях рекомендуется выбирать такие пределы измерения, чтобы отсчеты на них производились бы по второй половине шкалы прибора.

3.2. *Погрешность округления при измерении.* При измерениях показания приборов часто лежат между делениями шкалы. Отсчет “на глаз” долей деления затруднительны. Поэтому показания приборов, как правило, округляются - возникает *погрешность округления* при измерениях.

Интервал округления может быть различным. Чаще всего это либо цена наименьшего деления шкалы - Δ, либо половина цены деления. Очевидно, максимальная погрешность округления равна половине интервала округления, т.е. величине Δ/2. Действительная же погрешность меньше, и при доверительной вероятности α за погрешность округления принимают величину

$$\Delta x_{окр} = \alpha \frac{\Delta}{2} . \qquad (1.8)$$

3.3. *Погрешность округления при вычислениях.* Этот вид погрешности приходится учитывать только при косвенных измерениях. По этой причине сведения по данной погрешности в следующем разделе.

4. *Полная погрешность.* Как уже отмечалось, в реальных условиях присутствуют как случайные, так и систематические погрешности. В теории вероятности показывается, что погрешность, обусловленная несколькими независимыми причинами, определяется квадратичным суммированием, т. е. полная абсолютная погрешность прямого измерения

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{сл}^2 + \Delta x_{пр}^2 + \Delta x_{окр}^2} . \qquad (1.9)$$

Относительная погрешность

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} = \sqrt{\varepsilon_{сл}^2 + \varepsilon_{пр}^2 + \varepsilon_{окр}^2} . \qquad (1.10)$$

При этом доверительная вероятность α выбирается одинаковой для всех видов погрешностей.

Некоторые из слагаемых под знаком корня могут быть настолько малыми по сравнению с другими, что ими можно пренебречь (малыми считаются ошибки, которые не превышают 30 % от максимальной).

В заключение отметим, что количество необходимых измерений определяется соотношением приборной и случайной погрешностей. Если при повторных измерениях получается одно и то же значение, то это означает, что случайная погрешность в данном методе измерений значительно меньше приборной и большее число измерений не изменит общей ошибки.

При значительной случайной погрешности (при повторных измерениях получаются отличные друг от друга значения) число измерений лучше выбрать таким, чтобы случайная погрешность среднего арифметического была меньше приборной, или, по крайней мере, одного с ней порядка.

ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Задача ставится так: пусть искомая величина z определяется через другие величины $a, b, c, \ldots$, полученные при прямых измерениях

$$z = f(a, b, c, \ldots) . \qquad (1.11)$$

Необходимо найти среднее значение функции и погрешность ее измерений, т.е. найти доверительный интервал

$$z = \langle z \rangle \pm \Delta z \qquad (1.12)$$

при надежности α и относительную погрешность $\varepsilon_z = \Delta z / \langle z \rangle$.

Что касается $\langle z \rangle$, то оно находится путем подстановки в правую часть (1.11) вместо $a, b, c, \ldots$ их средних значений

$$\langle z \rangle = f(\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, \ldots) . \qquad (1.13)$$

Абсолютная погрешность косвенных измерений Δz является функцией абсолютных погрешностей прямых измерений. Если величины a, b, c, ... в функцию $z = f(a, b, c, ...)$ входят в виде сомножителей в той или иной степени, т. е. если

$$z = a^k \cdot b^l \cdot c^m \qquad (1.14)$$

(кроме случаев, когда показатель равен –1), то сначала удобно вычислить относительную погрешность

$$\varepsilon_z = \sqrt{k^2 \varepsilon_a^2 + l^2 \varepsilon_b^2 + \cdots} = \sqrt{k^2 \left(\frac{\Delta a}{\langle a \rangle} \right)^2 + l^2 \left(\frac{\Delta b}{\langle b \rangle} \right)^2 + \cdots} ,$$

(1.15)

а затем абсолютную

$$\Delta z = \varepsilon_z \langle z \rangle \ . \qquad (1.16)$$

Формулы для Δz и ε_z часто приводятся в справочной литературе.

Примечания.

1. При косвенных измерениях в расчетные формулы могут входить известные физические константы (ускорение свободного падения g, скорость света в вакууме c и т. д.), числа типа π, e, дробные множители 1/3, 1/6 ... . Эти величины при вычислениях округляются. При этом, естественно, в расчет вносится погрешность Δg, Δc, $\Delta \pi$, Δe, - погрешность округления при вычислениях, которая должна учитываться.

Принято считать, что погрешность округления приближенного числа равна половине единицы того разряда, до которого это число было округлено. Например, π = 3,14159... . Если взять π = 3,1, то $\Delta\pi$ = 0,05, если π = 3,14, то $\Delta\pi$ = 0,005 ... и т.д. Вопрос о том, до какого разряда округлять приближенное число, решается так: относительная ошибка, вносимая округлением, должна быть того же порядка или на порядок меньше, что и максимальная из относительных ошибок других видов. Таким же образом оценивается абсолютная ошибка табличных данных. Например, в таблице указано ρ =13,6 $\cdot 10^3$ кг/ м^3, следовательно, $\Delta\rho = 0{,}05 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ошибки значений универсальных постоянных часто указываются вместе с их средними значениями: $c = \left(299793{,}0 \pm 0{,}3\right) \cdot 10^3$ м/с, т.е. $\Delta c = 0{,}3 \cdot 10^3$ м/с.

2. Иногда при косвенных измерениях условия опыта при повторных наблюдениях не совпадают. В этом случае значение функции z вычисляется для каждого отдельного измерения, а доверительный интервал вычисляется через значения z так же, как при прямых измерениях (все погрешности здесь входят в одну случайную погрешность измерения z). Величины, которые не измеряются, а задаются (если они есть), должны быть указаны при этом с достаточно большой точностью.

Например, при определении вязкости жидкости методом Стокса (лпри использовании нескольких шариков разного диаметра абсолютная погрешность будет (см. (1.4))

$$\Delta\eta = t_{\alpha,n} \cdot \Delta S = t_{\alpha,n} \sqrt{\frac{\sum \left(\eta_i - \langle \eta \rangle\right)^2}{n\left(n-1\right)}}\ , \qquad (1.17)$$

где i - номер опыта, n - число опытов.

В качестве итога всего, сказанного выше, приведем порядок обработки результатов измерений.

Порядок обработки результатов измерений

Прямые измерения

1. Вычислить среднее значение для n измерений: $\langle x \rangle = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.

2. Найти погрешности отдельных измерений $\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle$.

3. Вычислить квадраты погрешностей отдельных измерений и их сумму: $\Delta x_i^2 = (x_i - \langle x \rangle)^2, \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2$.

4. Задать надежность α (для наших целей принимаем α = 0,95) и по таблице определить коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha,n}$ и $t_{\alpha,\infty}$.

5. Произвести оценку систематических погрешностей: приборной $\Delta x_{пр}$ и ошибки округления при измерениях $\Delta x_{окр} = \alpha\, \Delta/2$ (Δ - цена деления прибора) и найти полную погрешность результата измерений (полуширину доверительного интервала):

$$\Delta x = \sqrt{t_{\alpha,n}^2 \frac{\sum_i^n \Delta x_i^2}{n(n-1)} + \left(\frac{t_{\alpha,\infty}}{3}\right)^2 \cdot \Delta x_{пр}^2 + \left(\alpha \frac{\Delta}{2}\right)^2} \ .$$

6. Оценить относительную погрешность

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\ \% \ .$$

7. Окончательный результат записать в виде

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x, \quad \varepsilon = \cdots \% \quad \text{при } \alpha = \ldots$$

Косвенные измерения

1. Для каждой величины, измеренной прямым способом, входящей в формулу для определения искомой величины $z = f(\,a,\ b,\ c,\ \ldots)$, провести обработку, как указано выше.

2. Определить среднее значение искомой величины $z = f(\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, \ldots)$. При этом если среди величин $a, b, c, \ldots$ есть табличные константы или числа типа $\pi, e, \ldots$, то при вычислениях $\langle z \rangle$ округлять их следует так (если это возможно), чтобы вносимая при этом относительная ошибка была на порядок меньше наибольшей относительной ошибки величин, измеренных прямым способом.

3. Если зависимость z от a, b, c,... имеет вид $z = a^k\, b^l\, c^m$, где *k, l, m* - любые действительные числа, то относительную ошибку вычисляют так:

$$\varepsilon = \sqrt{k^2\left(\frac{\Delta a}{\langle a\rangle}\right)^2 + l^2\left(\frac{\Delta a}{\langle b\rangle}\right)^2 + \cdots},$$

а затем вычисляют абсолютную ошибку $\Delta z = \varepsilon \langle z\rangle$.

4. Окончательный результат следует записать в виде

z = <z> $\pm\Delta$ z ,% при $\alpha = \ldots$.

Примечание.

При обработке результатов прямых измерений нужно следовать следующему правилу: численные значения всех рассчитываемых величин должны содержать на один разряд больше, чем исходные (определенные экспериментально) величины.

При косвенных измерениях вычисления $\langle z\rangle$ производить по правилам приближенных вычислений.

В окончательной записи абсолютной погрешности следует оставлять только одну значащую цифру. Если этой цифрой окажется 1 или 2, то после нее сохраняют еще одну цифру.

Среднее значение округляется до того же результата, что и абсолютная погрешность.

Например:

$V = (375{,}21 \pm 0{,}03)\,\text{см}^3 = (3{,}7521 \pm 0{,}0003)\cdot 10^2$ см

$I = (5{,}530 \pm 0{,}013)$ А, $A = (57{,}5 \pm 0{,}7)\cdot 10^{-2}$ Дж.

- в расчетных формулах не учтено влияние некоторых второстепенных факторов (например, при взвешивании не учитывается сила Архимеда, при измерении сопротивления не учитывается сопротивление проводящих проводов);
- округлениями, которые производятся при измерениях и вычислениях.

В большем числе случаев систематические погрешности могут быть изучены и скомпенсированы путем внесения поправок в результаты измерений. Если же сделать этого нельзя (или сложно), необходимо правильно учесть вклад систематической ошибки в общую ошибку измерений.

При выполнении лабораторных работ приходится оценивать, как правило, следующие систематические ошибки.

3.1. *Приборная (инструментальная) погрешность.* Погрешность показания прибора (например, связанная с неправильностью разбивки шкалы амперметра, линейки...) является вполне определенной. При обработке результатов измерений этот вид погрешностей задается в виде так называемой *предельной погрешности прибора (*коротко - приборной погрешности), указывающей, какова максимально возможная погрешность при использовании данного прибора. При этом для одних приборов указывается предельная абсолютная погрешность $\Delta x_{пр}$, для других (электроизмерительных, части оптических) предельная относительная погрешность (класс точности прибора k).

Классом точности прибора называется отношение предельной абсолютной погрешности к максимальному значению измеряемой прибором величины

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{\Delta x_{пр}}}{\boldsymbol{x_{макс}}} 100 . \qquad (1.5)$$

Классов точности семь: 0,02; 0.05; 0,1; 0.5; 1; 2,5; 4. Это число указано на шкале прибора. Зная класс точности и пределы измерения прибора, можно рассчитать его предельную погрешность

$$\boldsymbol{\Delta x_{пр}} = \frac{\boldsymbol{k x_{макс}}}{\boldsymbol{100}} . \qquad (1.6)$$

Приборная погрешность других приборов равна *точности* измерительного прибора, под которой понимают ту наименьшую величину, которую можно надежно определить с помощью данного прибора. *Точность* прибора зависит от цены наименьшего деления его шкалы и указывается на самом приборе или в его паспорте. Если этих данных нет, то пользуются следующими правилами: если прибор снабжен нониусом (например, штангенциркуль), то его точность (и приборная погрешность) равна цене наименьшего деления $\Delta x_{пр} = \Delta$. При этом $\Delta = l\ /\ m$, где l - цена наименьшего деления *основной шкалы* прибора, m - число делений нониуса. При отсутствии нониуса (линейка, термометр,...) точность прибора равна половине наименьшего деления шкалы прибора $\Delta x_{пр} = \Delta/2$.

Приборная погрешность $\Delta x_{пр}$ представляет собой наибольшую погрешность, даваемую прибором. Действительная же погрешность прибора $\Delta x_{пр}^{ст}$ (стандартное отклонение) носит случайный характер и меньше $\Delta x_{пр}$. Строгих формул для перевода $\Delta x_{пр}$ в $\Delta x_{пр}^{ст}$ нет, чаще всего пользуются выражением

$$\Delta x_{пр}^{ст} = \frac{t_{\alpha,\infty}}{3} \cdot \Delta x_{пр} \ , \qquad (1.7)$$

где $t_{\alpha,\infty}$ - коэффициент Стьюдента при $n = \infty$.

Примечание: для электроизмерительных приборов $\Delta x_{пр}$ не зависит от значения измеряемой величины $x_{изм}$. Относительная же погрешность измерения, т.е. $\Delta x_{пр}\ /\ x_{изм}$, зависит от $x_{изм}$: чем больше $x_{изм}$, тем меньше относительная погрешность. Поэтому при измерениях рекомендуется выбирать такие пределы измерения, чтобы отсчеты на них производились бы по второй половине шкалы прибора.

3.2. *Погрешность округления при измерении.* При измерениях показания приборов часто лежат между делениями шкалы. Отсчет “на глаз” долей деления затруднительны. Поэтому показания приборов, как правило, округляются - возникает *погрешность округления* при измерениях.

Интервал округления может быть различным. Чаще всего это либо цена наименьшего деления шкалы - Δ, либо половина цены деления. Очевидно, максимальная погрешность округления равна половине интервала округления, т.е. величине $\Delta/2$. Действительная же погрешность меньше, и при доверительной вероятности α за погрешность округления принимают величину

$$\Delta x_{окр} = \alpha \frac{\Delta}{2} \quad . \qquad (1.8)$$

3.3. *Погрешность округления при вычислениях.* Этот вид погрешности приходится учитывать только при косвенных измерениях. По этой причине сведения по данной погрешности в следующем разделе.

4. *Полная погрешность.* Как уже отмечалось, в реальных условиях присутствуют как случайные, так и систематические погрешности. В теории вероятности показывается, что погрешность, обусловленная несколькими независимыми причинами, определяется квадратичным суммированием, т. е. полная абсолютная погрешность прямого измерения

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{сл}^2 + \Delta x_{пр}{}^2 + \Delta x_{окр}^2} \quad . \qquad (1.9)$$

Относительная погрешность

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} = \sqrt{\varepsilon_{сл}^2 + \varepsilon_{пр}^2 + \varepsilon_{окр}^2} \quad . \qquad (1.10)$$

При этом доверительная вероятность α выбирается одинаковой для всех видов погрешностей.

Некоторые из слагаемых под знаком корня могут быть настолько малыми по сравнению с другими, что ими можно пренебречь (малыми считаются ошибки, которые не превышают 30 % от максимальной).

В заключение отметим, что количество необходимых измерений определяется соотношением приборной и случайной погрешностей. Если при повторных измерениях получается одно и то же значение, то это означает, что случайная погрешность в данном методе измерений значительно меньше приборной и большее число измерений не изменит общей ошибки.

При значительной случайной погрешности (при повторных измерениях получаются отличные друг от друга значения) число измерений лучше выбрать таким, чтобы случайная погрешность среднего арифметического была меньше приборной, или, по крайней мере, одного с ней порядка.

Задача ставится так: пусть искомая величина *z* определяется через другие величины *a, b, c*, ..., полученные при прямых измерениях

$$z = f(a, b, c, ...) \,. \tag{1.11}$$

Необходимо найти среднее значение функции и погрешность ее измерений, т.е. найти доверительный интервал

$$z = \langle z \rangle \pm \Delta z \tag{1.12}$$

при надежности α и относительную погрешность $\varepsilon_z = \Delta z / \langle z \rangle$.

Что касается $\langle z \rangle$, то оно находится путем подстановки в правую часть (1.11) вместо *a, b, c*,... их средних значений

$$\langle z \rangle = f(\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, ...) \,. \tag{1.13}$$

Абсолютная погрешность косвенных измерений Δz является функцией абсолютных погрешностей прямых измерений. Если величины *a, b, c, ...* в функцию $z = f(a, b, c, ...)$ входят в виде сомножителей в той или иной степени, т. е. если

$$z = a^k \cdot b^l \cdot c^m \tag{1.14}$$

(кроме случаев, когда показатель равен –1), то сначала удобно вычислить относительную погрешность

$$\varepsilon_z = \sqrt{k^2 \varepsilon_a^2 + l^2 \varepsilon_b^2 + \cdots} = \sqrt{k^2 \left(\frac{\Delta a}{\langle a \rangle} \right)^2 + l^2 \left(\frac{\Delta b}{\langle b \rangle} \right)^2 + \cdots} \quad ,$$

(1.15)

а затем абсолютную

$$\Delta z = \varepsilon_z \langle z \rangle \quad . \qquad (1.16)$$

Формулы для Δz и ε_z часто приводятся в справочной литературе.

Примечания.

1. При косвенных измерениях в расчетные формулы могут входить известные физические константы (ускорение свободного падения g, скорость света в вакууме c и т. д.), числа типа π, e, дробные множители 1/3, 1/6 ... . Эти величины при вычислениях округляются. При этом, естественно, в расчет вносится погрешность Δg, Δc, $\Delta \pi$, Δe, - погрешность округления при вычислениях, которая должна учитываться.

Принято считать, что погрешность округления приближенного числа равна половине единицы того разряда, до которого это число было округлено. Например, π = 3,14159... . Если взять π = 3,1, то $\Delta\pi$ = 0,05, если π = 3,14, то $\Delta\pi$ = 0,005 ... и т.д. Вопрос о том, до какого разряда округлять приближенное число, решается так: относительная ошибка, вносимая округлением, должна быть того же порядка или на порядок меньше, что и максимальная из относительных ошибок других видов. Таким же образом оценивается абсолютная ошибка табличных данных. Например, в таблице указано ρ =13,6 $\cdot 10^3$ кг/ м^3, следовательно, $\Delta\rho = 0,05 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ошибки значений универсальных постоянных часто указываются вместе с их средними значениями: c = $(299793{,}0 \pm 0{,}3) \cdot 10^3$ м/с, т.е. $\Delta c = 0{,}3 \cdot 10^3$ м/с.

2. Иногда при косвенных измерениях условия опыта при повторных наблюдениях не совпадают. В этом случае значение функции *z* вычисляется для каждого отдельного измерения, а доверительный интервал вычисляется через значения *z* так же, как при прямых измерениях (все погрешности здесь входят в одну случайную погрешность измерения *z*). Величины, которые не измеряются, а задаются (если они есть), должны быть указаны при этом с достаточно большой точностью.

Например, при определении вязкости жидкости методом Стокса при использовании нескольких шариков разного диаметра абсолютная погрешность будет (см. (1.4))

$$\Delta\eta = t_{\alpha,n} \cdot \Delta S = t_{\alpha,n}\sqrt{\frac{\sum\left(\eta_i-\langle\eta\rangle\right)^2}{n\left(n-1\right)}}\ , \qquad (1.17)$$

где i - номер опыта, n - число опытов.

В качестве итога всего, сказанного выше, приведем порядок обработки результатов измерений.

ПОРЯДОК ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Прямые измерения

1. Вычислить среднее значение для n измерений: $\langle x\rangle = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

2. Найти погрешности отдельных измерений $\Delta x_i = x_i - \langle x\rangle$.

3. Вычислить квадраты погрешностей отдельных измерений и их сумму: $\Delta x_i^2 = \left(x_i - < x >\right)^2, \sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i^2$.

4. Задать надежность α (для наших целей принимаем α = 0,95) и по таблице определить коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha,n}$ и $t_{\alpha,\infty}$.

5. Произвести оценку систематических погрешностей: приборной $\Delta x_{пр}$ и ошибки округления при измерениях $\Delta x_{окр} = \alpha\, \Delta/2$ (Δ - цена деления прибора) и найти полную погрешность результата измерений (полуширину доверительного интервала):

$$\Delta x = \sqrt{t_{\alpha,n}^2 \frac{\sum_i^n \Delta x_i^2}{n(n-1)} + \left(\frac{t_{\alpha,\infty}}{3}\right)^2 \cdot \Delta x_{пр}^2 + \left(\alpha \frac{\Delta}{2}\right)^2} \; .$$

6. Оценить относительную погрешность

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\ \% \, .$$

7. Окончательный результат записать в виде

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x, \quad \varepsilon = \cdots \% \quad \text{при } \alpha = \ldots$$

КОСВЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

1. Для каждой величины, измеренной прямым способом, входящей в формулу для определения искомой величины $z = f(a,\ b,\ c,\ \ldots)$, провести обработку, как указано выше.

2. Определить среднее значение искомой величины $z = f(\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, \ldots)$. При этом если среди величин $a, b, c, \ldots$ есть табличные константы или числа типа $\pi, e, \ldots$, то при вычислениях $\langle z \rangle$ округлять их следует так (если это возможно), чтобы вносимая при этом относительная ошибка была на порядок меньше наибольшей относительной ошибки величин, измеренных прямым способом.

3. Если зависимость z от a, b, c,... имеет вид $z = a^k\, b^l\, c^m$, где $k,\ l,\ m$ - любые действительные числа, то относительную ошибку вычисляют так:

$$\varepsilon = \sqrt{k^2\left(\frac{\Delta a}{\langle a\rangle}\right)^2 + l^2\left(\frac{\Delta a}{\langle b\rangle}\right)^2 + \cdots},$$

а затем вычисляют абсолютную ошибку $\Delta z = \varepsilon \langle z\rangle$.

4. Окончательный результат следует записать в виде

$z = \langle z\rangle \pm \Delta z$,% при $\alpha = \ldots$.

Примечание.

При обработке результатов прямых измерений нужно следовать следующему правилу: численные значения всех рассчитываемых величин должны содержать на один разряд больше, чем исходные (определенные экспериментально) величины.

При косвенных измерениях вычисления $\langle z\rangle$ производить по правилам приближенных вычислений.

В окончательной записи абсолютной погрешности следует оставлять только одну значащую цифру. Если этой цифрой окажется 1 или 2, то после нее сохраняют еще одну цифру.

Среднее значение округляется до того же результата, что и абсолютная погрешность.

Например:

$V = (375{,}21 \pm 0{,}03)$ см^3 = $(3{,}7521 \pm 0{,}0003)\cdot 10^2$ см^3,

$I = (5{,}530 \pm 0{,}013)$ A , $A = (57{,}5 \pm 0{,}7)\cdot 10^{-2}$ Дж.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Основы метрологии и электрические измерения. Учебник для вузов /Б.Я. Авдеев, Е.М. Антонюк, Е.М. Душин и др.; Под ред.

Е.М. Душина – 6-е изд., переработ. и доп.- Л.: Энергоатомиздат. Ленингр.отд-ние, 1987.- 480 с.

2. Тартаковский Д.Ф., Ястребов А.С. Метрология, стандартизация и технические средства измерений: Учебн. для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 205 с.

3. Метрология и электрорадиоизмерения в телекоммутационных системах: Учебник для вузов /В.И. Нефёдов, В.И. Хахин, Е.В. Федорова и др.; Под ред. В.И. Нефёдова. – М.: Высш. шк., 2001. – 383 с.

4. Э.Г. Атамалян. Приборы и методы измерения электрических величин: Учеб. пособие для студ. втузов. – 2 изд., перераб. и доп. - М.: Высш.шк., 1989. – 384 с.

5. Тревис Дж. LabVIEW для всех/Пер с англ. Клушин Н.А. – М.:ДМК Пресс; ПриборКомплект,2005 – 544 с.

6. Батоврин В.К., Бессонов А.С., Мошкин В.В. LabVIEW: практикум по электронике и микропроцессорной технике: Учебное пособие для вузов. – М. ДМКПресс, 2005. -182 с.

7. Гринкруг М.С., Вакулюк А.А. Лабораторный практикум по физике: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2012. – 480с.: