

**Министерство образования и науки Российской Федерации**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Национальный минерально-сырьевой университет "Горный"**

**Кафедра общей и технической физики**

## **ФИЗИКА**

### **Изучение прецессии гироскопа**

*Методические указания к лабораторной работе  
для студентов бакалавриата и специалитета всех направлений  
подготовки*

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ**  
**2016**

УДК 539.12

**ФИЗИКА. Изучение прецессии гироскопа.** Методические указания к лабораторной работе. Сост.: Смирнова Н.Н., Фицак В.В. / Национальный минерально-сырьевой университет "Горный". С-Пб, 2016, 23 с.

Методические указания к лабораторной работе курсу «Физика», «Изучение прецессии гироскопа», предназначены для бакалавров и специалистов всех направлений и форм обучения.

С помощью методических указаний студент имеет возможность, в предварительном плане, ознакомиться с физическими явлениями, методикой выполнения лабораторного исследования и правилами оформления лабораторных работ.

Выполнение лабораторных работ проводится студентом индивидуально по графику.

Табл. 6. Ил. 7. Библиогр.: 17 назв.

Научный редактор проф. Н.Н. Смирнова

© Национальный минерально-сырьевой  
университет "Горный", 2016 г.

## **1. Введение**

В процессе обучения в вузе выполнение лабораторной работы студентами является одной из форм образовательных технологий. Она способствует формированию у студентов комплекса компетенций, таких как: способность к познавательной и творческой деятельности; способность использовать навыки работы с информацией из различных источников для решения профессиональных задач и др.

Методические указания к лабораторной работе предназначены для самостоятельной работы студентов. Они содержат основные теоретические сведения по теме, а также порядок выполнения и оформления лабораторной работы.

При выполнении лабораторной работы, студент должен понимать физический смысл данного явления или процесса рассматриваемого в лабораторной работе. Поэтому к выполнению работы целесообразно приступать только после изучения теоретического и методического материала, соответствующего данному разделу.

Кроме формирования необходимых для выпускников вуза компетенций, самостоятельное выполнение лабораторной работы способствует подготовке студентов к сдаче экзамена.

## **2. Краткое теоретическое содержание**

Всякое движение твердого тела можно разложить на два основных вида движения – *поступательное и вращательное*.

При *поступательном* движении все точки тела в любой момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения, вследствие чего перемещения всех точек тела равны друг другу.

При *вращательном* движении все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения. Перемещения точек тела оказываются разными. Если твердое тело перемещается в пространстве и при этом вращается, то это сложное движение можно представить как сумму поступательного и вращательного движений, происходящих одновременно.

## 2.1 Момент силы

Характеристикой внешнего механического воздействия, приводящего к изменению параметров вращения тела, является момент силы.

*Моментом силы  $\vec{F}$  относительно неподвижной точки  $O$*  называется векторная величина  $\vec{M}$ , равная векторному произведению радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из точки  $O$  в точку приложения силы, на вектор этой силы  $\vec{F}$  (см. рис. 1):

$$\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}] \quad (2.1)$$

*Момент силы* – псевдовектор, его направление определяется правилом правого буравчика. При повороте винта с правой нарезкой по часовой стрелке от радиуса-вектора  $\vec{r}$  к вектору силы  $\vec{F}$  поступательное движение буравчика покажет направление момента силы. Модуль момента силы равен

$$M = r \cdot F \sin \alpha = \ell \cdot F, \quad (2.2)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , а  $\ell = r \sin \alpha$  – плечо силы относительно точки  $O$ .

Если действует несколько сил (система сил), то моментом этой системы (главным или результирующим Моментом) является геометрическая сумма моментов относительно этой точки всех  $n$  сил системы:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \vec{F}_i] \quad (2.3)$$

где  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  в точку приложения силы  $\vec{F}_i$ .

*Моментом силы  $\vec{F}$  относительно неподвижной оси  $Oz$*  называется скалярная величина  $M_z$ , равная проекции на эту ось вектора момента силы  $\vec{M}$ , определенного относительно произвольной точки  $O$  данной оси  $z$  (см. рис. 2).

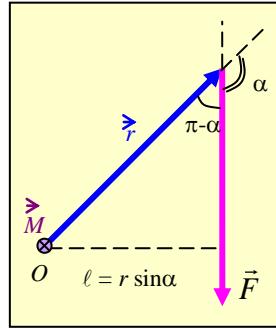


Рис. 1 Определение момента силы

$$M_z = [\vec{r} \cdot \vec{F}]_{npz}. \quad (2.4)$$

Вектор силы может быть представлен как сумма трех взаимно перпендикулярных векторов:  $\vec{F}_{||}$  – параллельный оси вращения,  $\vec{F}_{\perp}$  – перпендикулярный ей и  $\vec{F}_{\tau}$  – направленный перпендикулярно к оси и к радиус-вектору  $\vec{r}$  (касательный). Моменты параллельной (осевой) и перпендикулярной (радиальной) составляющих силы равны нулю, поэтому

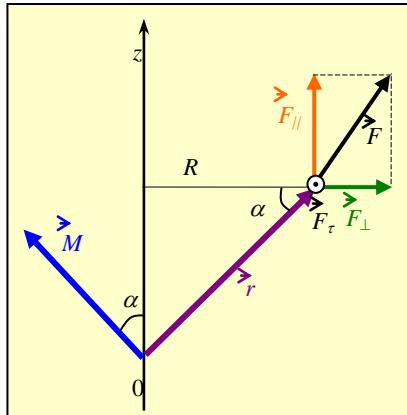


Рис. 2 Момент силы относительно оси

$$M_z = RF_{\tau}, \quad (2.5)$$

где  $F_{\tau}$  – проекция вектора  $\vec{F}$  на орт  $\tau$ , касательный к окружности радиуса  $R$  и направленный так, что движение по окружности в направлении  $\tau$  образует с направлением оси правовинтовую систему.

Главный (результатирующий) момент, действующий на точку системы сил, равен алгебраической сумме моментов, относительно этой оси всех сил системы.

$$[M] = H \cdot m, \dim M = L^2 MT^{-2}.$$

## 2.2 Момент импульса

*Моментом импульса материальной точки относительно неподвижной точки  $O$*  называется вектор  $\vec{L}_i$ , равный векторному произведению радиус-вектора  $\vec{r}_i$ , проведенного из точки  $O$  в место, нахождения материальной точки, на вектор ее импульса  $\vec{p}_i$  (рис. 3).

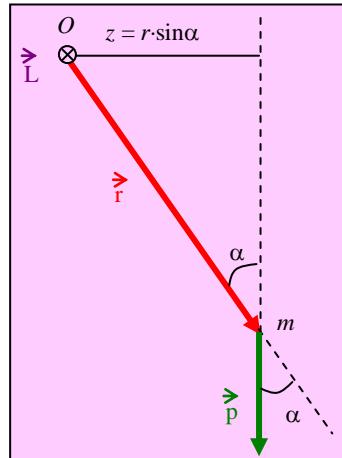


Рис. 3 Определение момента импульса

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \ \vec{p}_i]. \quad (2.6)$$

Момент импульса – псевдовектор, его направление определяют правилом правого буравчика. При повороте винта с правой нарезкой по часовой стрелке от радиуса-вектора  $\vec{r}_i$  к вектору импульса  $\vec{p}_i$  поступательное движение буравчика покажет направление момента импульса. Модуль вектора момента импульса материальной точки равен

$$L_i = r_i \cdot p_i \cdot \sin \alpha = \ell \cdot p_i, \quad (2.7)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$ ,  $\ell = r_i \sin \alpha$  – плечо.

*Моментом импульса тела (системы материальных точек) относительно неподвижной точки  $O$*  называется вектор  $\vec{L}$ , равный геометрической сумме моментов импульса всех материальных точек  $\vec{L}_i$  относительно той же точки  $O$ .

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \ \vec{p}_i]. \quad (2.8)$$

*Моментом импульса тела относительно неподвижной оси  $z$*  называется скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора момента импульса тела  $\vec{L}$  относительно точки  $O$ , принадлежащей этой оси:

$$L_z = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \ \vec{p}_i]_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i. \quad (2.9)$$

$$[L] = \text{кг м}^2/\text{с} = \text{Дж} \cdot \text{с}, \dim L = L^2 M T^{-1}.$$

### 2.3 Кинетическая энергия вращающегося тела. Момент инерции твердого тела

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг некоторой неподвижной в пространстве оси  $OO'$ .

Мысленно разобьем объем тела на малые элементы и пронумеруем их от 1 до  $N$ . Выделим элемент тела массы  $\Delta m_i$  находящий-

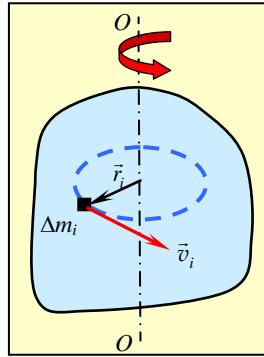


Рис. 4 Вращение твердого тела

ся на расстоянии  $r_i$  от оси вращения (рис.4). Линейная скорость этого элемента  $v_i$ . Кинетическая энергия выбранного малого элемента тела

$$\Delta W_{ki} = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i \omega^2 r_i^2}{2} \quad (2.10)$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения тела (одинакова для всех элементарных масс).

Для того чтобы найти кинетическую энергию всего вращающегося тела, надо просуммировать кинетические энергии отдельных элементов тела:

$$W_k = \sum_{i=1}^N \Delta W_{ki} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2. \quad (2.11)$$

Введем обозначение:

$$J = \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2. \quad (2.12)$$

Эта физическая величина называется моментом инерции твердого тела. Момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении. Размерность момента инерции в СИ -  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ .

Таким образом, кинетическая энергия вращающегося тела может быть выражена через момент инерции тела и угловую скорость его вращения:

$$W_k = \frac{J\omega^2}{2}. \quad (2.13)$$

Если тело одновременно двигается поступательно и вращается, то кинетическая энергия тела складывается из кинетической энергии поступательного движения центра масс и кинетической энергии вращательного движения.

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \quad (2.14)$$

*Моментом инерции материальной точки  $O$  относительно произвольной оси вращения* называется произведение массы материальной точки на квадрат расстояния ее до оси вращения.

$$J_i = m_i r_i^2, \quad (2.15)$$

где  $m_i$  – масса материальной точки,  $r_i$  – расстояние до оси вращения.

*Моментом инерции тела относительно неподвижной оси, проходящей через центр масс, называют сумму произведений масс всех  $n$  материальных точек тела на квадрат расстояний их до оси вращения:*

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \quad (2.16)$$

где  $m_i$  и  $r_i$  – масса материальной точки и ее расстояние до оси вращения.

$$[J] = \text{кг}\cdot\text{м}^2, \dim J = ML^2.$$

Подобно тому, как масса является мерой инертности при поступательном движении, момент инерции это мера инертности при вращательном движении.

Момент инерции относительно произвольной оси можно найти с помощью *теоремы Штейнера*: момент инерции относительно произвольной оси  $O'O'$  (рис. 5) равен сумме момента инерции  $J_0$ , относительно оси  $OO$ , параллельной данной и проходящей через центр инерции тела и произведения массы тела на квадрат расстояния  $a$  между осями:

$$J = J_0 + ma^2. \quad (2.17)$$

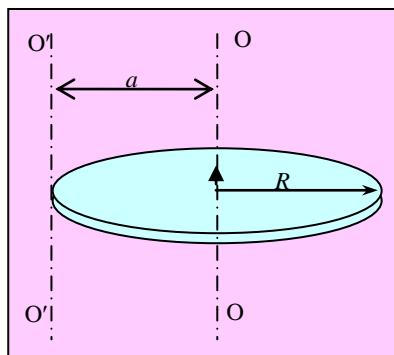


Рис. 5 Теорема Штейнера

## 2.4 Основной закон динамики вращательного движения

В динамике вращательного движения основными величинами являются момент, силы  $\vec{M}$ , момент импульса  $\vec{L}$  и момент инерции  $J$ . Основной закон динамики вращения отражает взаимосвязь этих величин.

Если материальная точка вращается относительно неподвижной точки  $O$ , то производная по времени от момента ее импульса относительно этой точки  $O$  равна моменту силы относительно этой же точки:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i, \quad (2.18)$$

где  $\vec{L}_i$  – момент импульса, точки,  $\vec{M}_i$  – момент силы, приложенной к этой точке.

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, то основной закон динамики вращения твердого тела принимает вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}^{\text{внеш}} \quad (2.19)$$

где  $\vec{M}^{\text{внеш}}$  – сумма моментов внешних сил (главный момент)

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\omega$ , то его момент инерции относительно этой оси  $J_z$  не изменяется во времени ( $J_z = \text{const}$ ). Момент импульса относительно этой оси  $\vec{L}_z = J_z \vec{\omega}$ .

*Основной закон динамики твердого тела*, вращающегося вокруг неподвижной оси, примет вид:

$$J_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}, \text{ или } \vec{\epsilon} = \frac{1}{J_z} \vec{M}^{\text{внеш}}, \quad (2.20)$$

где  $\vec{\epsilon}$  – угловое ускорение тела.

*Дифференциальное уравнение*, описывающее вращение тела вокруг неподвижной оси имеет вид:

$$J_z \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2} = \vec{M}^{\text{внеш}}; \quad (2.21)$$

где  $J_z$  – момент инерции тела относительно этой оси,  $\vec{\phi}$  – угловое перемещение,  $\vec{M}^{\text{внеш}}$  – главный момент внешних сил.

*В общем случае движение свободного твердого тела удовлетворяет двум дифференциальным уравнениям:*

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) = \vec{F}^{\text{внеш}}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}} \quad (2.22)$$

где  $m$  – масса тела,  $\vec{v}_c$  – скорость поступательного движения его центра масс,  $\vec{F}^{new}$  – главный вектор внешних сил, приложенных к телу,  $\vec{M}^{new}$  – главный момент внешних сил относительно точки вращения,  $\vec{L}$  – момент импульса тела относительно той же точки.

Отметим, что имеется формальная аналогия величин для поступательного и вращательного движений.

Поступательное движение	Вращательное движение
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = I\vec{\epsilon}$
$\vec{F}$ – сила	$\vec{M}$ – момент силы
$m$ – масса	$I$ – момент инерции
$\vec{a}$ – линейное ускорение	$\vec{\epsilon}$ – угловое ускорение
$\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс тела	$\vec{L} = J\vec{\omega}$ – момент импульса
$dA = \vec{F}d\vec{r}$ – работа силы	$dA = \vec{M}d\vec{\phi}$ – работа момента силы

### Условия равновесия твердых тел

Движение твердого тела определяется двумя уравнениями:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \\ \vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = I\vec{\epsilon} \end{array} \right\}, \quad (2.23)$$

где  $\vec{F}_i$  – внешние силы;  $\vec{M}_i$  – моменты этих сил.

Тело может оставаться в состоянии покоя в том случае, если нет причин, приводящих к возникновению поступательного движения или вращения. В соответствии с (2.23) для этого необходимо и достаточно, чтобы были выполнены два условия:

1. Сумма всех внешних сил, приложенных к телу, должна быть равна нулю:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0. \quad (2.24)$$

2. Результирующий момент всех внешних сил относительно любой неподвижной оси должен быть равен нулю:

$$\sum_i \vec{M}_i = 0. \quad (2.25)$$

## 2.5 Работа внешних сил при вращении твердого тела

Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной в пространстве оси вращения.

Допустим, что  $F_i$  – внешняя сила, приложенная к некоторой элементарной массе  $\Delta m_i$  твердого тела и вызывающая вращение. За малый промежуток времени элементарная масса переместится на  $dl_i$  и следовательно силой будет совершена работа

$$dA = F_i dl_i \cos \alpha, \quad (2.26)$$

где  $\alpha$  – угол между направлением силы и перемещения. Но  $F_i \cos \alpha$  равняется  $F_\tau$  – проекции силы на касательную к траектории движения массы  $\Delta m_i$ , а величина  $dl_i = r_i d\varphi$ . Следовательно

$$dA = F_\tau r_i d\varphi. \quad (2.27)$$

Легко заметить, что произведение  $\vec{F}_\tau r_i$  является моментом силы  $M_{zi}$  относительно заданной оси вращения  $z$  и действующим на элемент тела  $\Delta m_i$ . Следовательно, работа силы будет равна

$$dA = M_{zi} d\varphi. \quad (2.28)$$

Суммируя работу моментов сил, приложенных ко всем элементам тела, получим для элементарно малой энергии, затрачиваемой на элементарно малый поворот тела  $d\varphi$ :

$$dA = \sum_i M_{zi} d\varphi = M_z d\varphi, \quad (2.29)$$

где  $M_z$  – результирующий момент всех внешних сил, действующих на твердое тело относительно заданной оси вращения  $z$ .

Работа за конечный промежуток времени  $t$

$$A = \int dA = \int_0^\varphi M_z d\varphi = \int_0^t M_z \omega dt. \quad (2.30)$$

## 2.6 Закон сохранения момента импульса и изотропность пространства

Закон сохранения момента импульса является следствием основного закона динамики вращательного движения. В системе из  $n$  взаимодействующих частиц (тел) векторная сумма всех внутренних

сил, а следовательно и моментов сил, равна нулю, и дифференциальное уравнение моментов имеет вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}^{\text{внеш}} , \quad (2.31)$$

где  $\vec{L}$  – полный момент импульса всей системы,  $\vec{M}^{\text{внеш}}$  – результирующий момент внешних сил.

Если система замкнута

$$\vec{M}^{\text{внеш}} = 0 , \quad (2.32)$$

откуда следует

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 , \quad (2.33)$$

что возможно при

$$d\vec{L} = \text{const} . \quad (2.5.34)$$

**Закон сохранения момента импульса:** *Момент импульса замкнутой системы частиц (тел) остается постоянным.*

Закон сохранения момента импульса является следствием свойства изотропности пространства, которое проявляется в том, что физические свойства и законы движения замкнутой системы не зависят от выбора направлений осей координат инерциальных систем отсчёта.

В замкнутой системе три физические величины: *энергия, импульс и момент импульса* (являющиеся функциями координат и скоростей) сохраняются. Такие функции называются *интегралами движения*. В системе из  $n$  частиц существует  $6n - 1$  интегралов движения, но свойством аддитивности обладают лишь три из них – энергия, импульс и момент импульса.

## 2.7 Гирокопический эффект. Гирокоп.

Массивное симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг оси симметрии, называется *гироскопом*.

Гирокоп, будучи приведен во вращение, стремится сохранить направление своей оси неизменным в пространстве, что является проявлением закона *сохранения момента импульса*. Гирокоп тем

более устойчив, чем больше угловая скорость вращения и чем больше момент инерции гироскопа относительно оси вращения.

Если же к вращающемуся гироскопу приложить пару сил, стремящуюся повернуть его около оси, перпендикулярной к оси вращения гироскопа, то он станет поворачиваться, но только вокруг третьей оси, перпендикулярной первым двум (рис. 6). Этот эффект называется *гироскопическим эффектом*. Возникающее при этом движение называется прецессионным движением или *прецессией*.

Прецессирует любое тело, вращающееся вокруг некоторой оси, если на него действует момент сил, перпендикулярный оси вращения.

Примером прецессионного движения может служить поведение детской игрушки, которая называется волчком или юлой. Прецессирует также Земля под действием гравитационного поля Луны. Момент сил, действующий на Землю со стороны Луны, определяется геометрической формой Земли – отсутствием сферической симметрии, т.е. с ее «сплюснутостью».

### Гироскоп

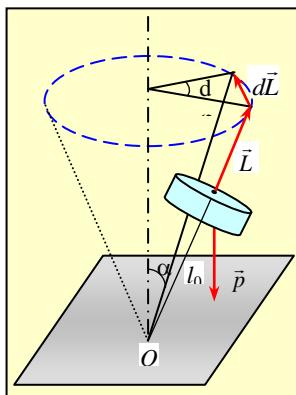


Рис. 6 Прецессия гироскопа

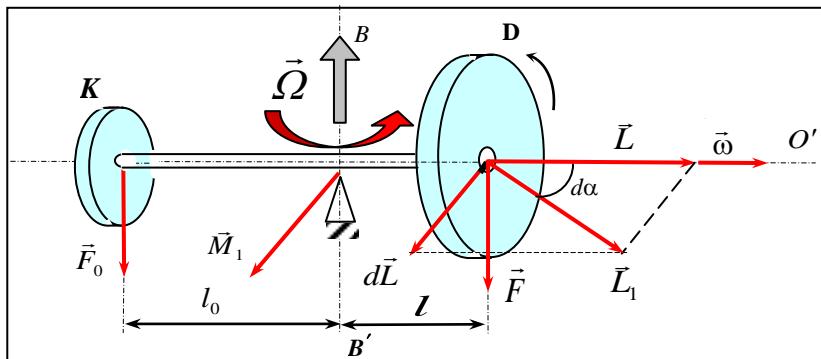


Рис. 7 Схема модели простейшего механического гироскопа и силы (моменты сил и импульсов), действующие на его основные точки

Рассмотрим прецессионное движение подробнее. Такое движение реализует массивный диск, насаженный на *вертикальную* ось вокруг, которой он вращается. Диск обладает моментом импульса  $\vec{L}$ , направленным по оси вращения диска (рис. 7).

У гироскопа, основным элементом которого является диск  $D$ , вращающийся со скоростью  $\vec{\omega}$  вокруг *горизонтальной* оси  $OO'$  возникнет вращающий момент  $\vec{M}_1$  относительно точки  $C$  и моментом импульса  $\vec{L}$  направлен по оси вращения диск  $D$ .

Ось гироскопа шарнирно закреплена в точке  $C$ . Прибор снабжен противовесом  $K$ . Если противовес установлен так, что точка  $C$  является центром масс системы ( $m$  – масса гироскопа;  $m_0$  – масса противовеса  $K$ ; масса стержня пренебрежимо мала), то без учёта трения запишем:

$$m_0 g l_0 = m g l \quad \text{или} \quad F_0 l_0 = Fl, \quad (2.35)$$

то есть результирующий момент сил, действующий на систему, равен нулю.

Тогда справедлив закон сохранения момента импульса  $\vec{L}$ :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0. \quad (2.36)$$

Иными словами, в этом случае  $\vec{L} = J\vec{\omega} = \text{const}$ ; где  $J$  – момент инерции гироскопа,  $\vec{\omega}$  – собственная угловая скорость вращения гироскопа.

Поскольку момент инерции диска относительно его оси симметрии есть величина постоянная, то вектор угловой скорости также остается постоянным как по величине, так и по направлению.

Вектор  $\vec{\omega}$  направлен по оси вращения в соответствии с правилом правого винта. Таким образом, ось свободного гироскопа сохраняет своё положение в пространстве неизменным.

Если к противовесу  $K$  добавить еще один с массой  $m_1$ , то центр масс системы сместится и возникнет вращающий момент  $\vec{M}_1$  относительно точки  $C$ . Согласно уравнению моментов,  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ . Под

действием этого вращающего момента вектор момента импульса получит приращение  $d\vec{L}$ , совпадающее по направлению с вектором  $\vec{M}_1$ :

$$d\vec{L} = \vec{M}_1 dt, \quad M_1 = m_1 g l_0 = F_1 l_0. \quad (2.37)$$

Векторы сил тяжести  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_0$  направлены вертикально вниз. Следовательно, векторы  $\vec{M}_1$ , и  $d\vec{L}$ , лежат в горизонтальной плоскости. Спустя время  $dt$  момент импульса гироскопа изменится на величину  $d\vec{L}$  и станет равен

$$\vec{L}_1 = \vec{L} + d\vec{L}. \quad (2.38)$$

Таким образом, вектор  $\vec{L}$  изменяет своё направление в пространстве, всё время оставаясь в горизонтальной плоскости. Учитывая, что вектор момента импульса гироскопа направлен вдоль оси вращения, поворот вектора  $\vec{L}$  на некоторый угол  $d\alpha$  за время  $dt$  означает поворот оси вращения на тот же угол. В результате ось симметрии гироскопа начнет вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси  $BB'$  с угловой скоростью:

$$\Omega = \frac{d\alpha}{dt}. \quad (2.39)$$

Такое движение называется *регулярной прецессией*, а величина  $\dot{\Omega}$  – угловой скоростью прецессии. Если в начальный момент ось  $OO'$  гироскопа установлена не горизонтально, то при прецессии она будет описывать в пространстве конус относительно вертикальной оси. Наличие сил трения приводит к тому, что угол наклона оси гироскопа будет постоянно изменяться. Такое движение носит название *нutationi*.

Выясним зависимость угловой скорости прецессии гироскопа от основных параметров системы. Спроектируем равенство (2.37) на горизонтальную ось, перпендикулярную  $OO'$

$$dL = F_1 l_0 dt. \quad (2.40)$$

Из геометрических соображений (см. рис. 7) при малых углах поворота  $dL = L d\alpha$ , тогда  $L d\alpha = F_1 l_0 dt$ , и угловая скорость прецессии выражается:

$$\Omega = \frac{F_1 l_0}{J\omega} = \frac{m_1 g l_0}{J\omega}. \quad (2.41)$$

Это означает, что если прикладывать к гироскопу постоянную внешнюю силу, то он начнет поворачиваться вокруг третьей оси, не совпадающей по направлению с основной осью вращения ротора.

Прецессия, величина которой пропорциональна величине действующей силы, удерживает устройство, ориентированное в вертикальном направлении, причем может быть измерен угол наклона относительно опорной поверхности. Однажды раскрученное устройство стремится сопротивляться изменениям в его ориентации вследствие углового момента. Этот эффект известен в физике также как гироскопическая инерция. В случае прекращения внешнего воздействия прецессия мгновенно заканчивается, но ротор продолжает вращаться.

На диск действует сила тяжести  $\vec{P}$ , вызывающая момент силы  $\vec{M}$  относительно точки опоры  $O$ . Этот момент направлен перпендикулярно оси вращения диска и равен

$$M = Pl_0 \sin \alpha, \quad (2.42)$$

где  $l_0$  – расстояние от центра тяжести диска до точки опоры  $O$ .

На основании основного закона динамики вращательного движения момент силы  $\vec{M}$  вызовет за интервал времени  $dt$  изменение момента импульса

$$d\vec{L} = \vec{M} dt. \quad (2.43)$$

Векторы  $d\vec{L}$  и  $\vec{M}$  направлены по одной прямой и перпендикулярны к оси вращения.

Из рис. 22 видно, что конец вектора  $\vec{L}$  за время  $dt$  переместится на угол

$$d\phi = \frac{dL}{L \sin \alpha}. \quad (2.44)$$

Подставив в это соотношение значения  $L$ ,  $dL$  и  $M$ , получим

$$d\phi = \frac{Mdt}{L \sin \alpha} = \frac{Pl_0 \sin \alpha dt}{L \sin \alpha} = \frac{Pl_0 dt}{I\omega}. \quad (2.45)$$

Таким образом, *угловая скорость смещения конца вектора  $\vec{L}$* :

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{Pl_0}{I\omega} \quad (2.46)$$

и верхний конец оси вращения диска будет описывать окружность в горизонтальной плоскости (рис. 6). Подобное движение тела называется *прецессионным*, а сам эффект *гироскопическим эффектом*.

### **3. Лабораторная работа**

**Цель работы** – экспериментально исследовать основные свойства гироскопа, изучить законы вращательного движения твердого тела.

#### **Экспериментальная установка**

Подвижный элемент гироскопа (рис. 7) представляет собой массивный маховик (диск), закрепленный на оси электродвигателя. Вдоль оси маховика закреплена планка с линейной метрической шкалой. Вдоль планки может перемещаться противовес.

Угол поворота оси двигателя в горизонтальной плоскости и время движения измеряются электронной схемой с фотоэлектрическим датчиком. Кроме того, угол поворота гироскопа можно считывать по нанесенной на основании подвижной части угловой шкале. По окружности основания через каждые  $5^\circ$  нанесены отверстия, которые служат для считывания угла поворота при помощи фотоэлектрического датчика. На лицевой панели блока управления расположены индикаторные табло угла и времени поворота, а также кнопки «СЕТЬ», «СБРОС», «СТОП», и рукоятка регулятора скорости вращения «РЕГ. СКОРОСТИ».

#### **Порядок выполнения работы**

1. Перемещая противовес К вдоль планки, уравновесить систему (ось должна принять горизонтальное положение); измерить и записать расстояние  $l_0$  от центра масс противовеса до оси вращения – точки С (см. рисунок 7).

2. Включить установку, двигатель и довести угловую скорость вращения  $\omega$  до  $1000 \text{ мин}^{-1}$ .

3. Подвесить к противовесу перегруз  $m_1$  и дать гироскопу свободно прецессировать, записать значение  $m_1$ .

4. После поворота гироскопа на некоторый угол в пределах

$30^\circ < \alpha < 100^\circ$  записать угол  $\alpha$  и время  $t$  поворота.

5. Повторить пп. 2-4 при данной угловой скорости ротора не менее 5 раз.

6. Провести измерения для пяти-шести режимов вращения ротора, меняя угловую скорость через 1000 мин<sup>-1</sup> от 1000 до 6000 мин<sup>-1</sup>. Перед каждым повторным измерением устанавливать ось гироскопа горизонтально.

7. Результаты измерений записать в таблицу 1.

Таблица 1

Номер опыта	Физ. величина	$\omega$	$\alpha$	$t$	$\Omega$	$\Delta\Omega$	$J$	$\Delta J$
	Ед. измерения							
	Номер измерения							
1	1							
	2							
	...							
	5							
	Среднее				$\bar{\Omega}_1$		$\bar{J}_1$	
2								
...								

8. Обработать результаты эксперимента. Вычислить угловую скорость прецессии гироскопа  $\Omega = \frac{\alpha}{t}$  для всех значений угловой скорости  $\omega$  (вращение в данном случае равномерное) и вычислить среднее значение  $\bar{\Omega}$  для каждого режима вращения двигателя. Найти ошибку измерений  $\Delta\Omega$  по разбросу результатов и построить график зависимости  $\Omega = f(\frac{1}{\omega})$ . Сделать вывод относительно выполнения зависимости (2.41).

Рассчитать момент инерции гироскопа в каждом случае ( $k$  - номер измерения,  $\omega$  и  $\Omega$  выразить в радианах в секунд)

$$J_k = \frac{m_1 \cdot g \cdot l_0}{\omega_k \cdot \bar{\Omega}_k} \quad (2.47)$$

и вычислить среднее значение момента инерции  $\bar{J}$ .

Определить среднюю арифметическую ошибку результата  $\Delta J$  (формулу вывести самостоятельно). Погрешность  $\Delta l_0$  и  $\Delta \omega$  определить по цене деления измерительных приборов, погрешность  $\Delta m = 1$  г.

9. Результат измерений представить в виде  $J = \bar{J} \pm \Delta J$ .

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое гироскоп?
2. Какими свойствами обладает гироскоп? Какими физическими законами обусловлены эти свойства?
3. Почему возникает регулярная прецессия гироскопа?
4. От каких параметров системы зависит угловая скорость прецессии?

### **4. Требования к содержанию отчёта по лабораторной работе**

Отчёт оформляется в печатном виде на листах формата А4 в соответствии с требованиями, предъявляемыми кафедрой ОТФ, в котором помимо стандартного титульного листа должны быть раскрыты следующие пункты:

- I. Цель работы.
- II. Краткое теоретическое содержание:
  1. Явление, изучаемое в работе.
  2. Определение основных физических понятий, объектов, процессов и величин.
  3. Законы и соотношения, описывающие изучаемые процессы, на основании которых получены расчётные формулы.
  4. Пояснения к физическим величинам и их единицы измерений.
- III. Схема установки.
- IV. Расчётные формулы.
- V. Формулы погрешностей косвенных измерений.
- VI. Таблицы с результатами измерений и вычислений.  
(Таблицы должны иметь номер и название. Единицы измерения физических величин должны быть указаны в отдельной строке.)
- VII. Пример вычисления (для одного опыта):

1. Исходные данные.

2. Вычисления.

3. Окончательный результат.

VIII. Графический материал:

1. Аналитическое выражение функциональной зависимости, которую необходимо построить.

2. На осях координат указать масштаб, физические величины и единицы измерения.

3. На координатной плоскости должны быть нанесены экспериментальные точки.

4. По результатам эксперимента, представленным на координатной плоскости, провести плавную линию, аппроксимирующую функциональную теоретическую зависимость в соответствии с методом наименьших квадратов.

IX. Анализ полученного результата. Выводы.

## **5. Рекомендации по защите отчета**

К защите допускаются студенты, подготовившие отчет в соответствии с требованиями к его содержанию в установленные сроки. После проверки преподавателем содержания отчёта, при наличии ошибок и недочетов, работа возвращается студенту на доработку.

При правильном выполнении лабораторной работы, соблюдении всех требований к содержанию и оформлению отчёта, студент допускается к защите.

Для успешной защиты отчета необходимо изучить теоретический материал по теме работы, а так же освоить математический аппарат, необходимый для вывода расчетных формул работы.

При подготовке к защите, помимо данного методического указания, необходимо использовать учебники и другие учебные пособия, рекомендованные к учебному процессу кафедрой ОТФ и Министерством образования и науки.

Во время защиты студент должен уметь ответить на вопросы преподавателя в полном объёме теоретического и методического содержания данной лабораторной работы, уметь самостоятельно

вывести необходимые расчётные формулы, выполнить анализ полученных зависимостей и прокомментировать полученные результаты.

## 6. Справочные таблицы

Таблица 2.

Основные физические постоянные.

Физическая величина	Численное значение
Атомная единица массы (унифицированная)	$1 \text{ у.а.е.м.} = 1,660531(111)10^{-27} \text{ кг} = 931,481(52) \text{ МэВ.}$
Заряд элементарный	$e = 1,6021917(70)10^{-19} \text{ Кл.}$
Заряд удельный электрона	$\frac{e}{m_e} = 1,7588028(54)10^{11} \text{ Кл}\cdot\text{кг}^{-1}.$
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1,674920(11)10^{-27} \text{ кг},$ $M_n = 1,00866520(10) \text{ а.е.м.}$
Масса покоя протона	$m_p = 1,672614(11)10^{-27} \text{ кг},$ $M_p = 1,00727661(8) \text{ а.е.м.}$
Масса покоя электрона	$m_e = 9,109558(54) 10^{-31} \text{ кг},$ $M_e = 5,485930(34) 10^{-4} \text{ а.е.м.}$
Постоянная Планка	$h = 6,626196(50)10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с},$ $\hbar = 1,0545919(80)10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с.}$
Постоянная Ридберга	$R' = 1,09737312(11) 10^7 \text{ м}^{-1}.$
Скорость света в вакууме	$c = 2,9979250(10) 10^8 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}.$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}\cdot\text{м}^{-1}.$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн}\cdot\text{м}^{-1}.$

Таблица 3

Множители, приставки для образования десятичных и кратных единиц

Множитель	Приставка		Множитель	Приставка	
	Наименование	Обозначение		Наименование	Обозначение
$10^{12}$	Тера	Т	$10^{-2}$	Санти	с
$10^9$	Гига	Г	$10^{-3}$	Милли	м
$10^6$	Мега	М	$10^{-6}$	Микро	мк
$10^3$	Кило	к	$10^{-9}$	Нано	н
$10^{-1}$	Деци	д	$10^{-12}$	Пико	п

Таблица 4  
Основные величины, их обозначения и единицы величин в СИ

Величина		Единица		
Наименование	Размер-ность	Наименование	Обозначение	
			Международное	русское
Длина	L	метр	<i>m</i>	<i>м</i>
Время	T	секунда	<i>s</i>	<i>с</i>
Масса	M	килограмм	<i>kg</i>	<i>кг</i>
Сила электрического тока	I	Ампер	<i>A</i>	<i>А</i>
Термодинамическая температура	$\Theta$	Кельвин	<i>K</i>	<i>К</i>
Количество вещества	N	моль	<i>mol</i>	<i>моль</i>
Сила света	J	канделла	<i>cd</i>	<i>кд</i>

Таблица 5  
Производные единицы СИ, имеющие наименование

Величина	Единица		
	наименование	Обозначение	Выражение через основные единицы СИ
Частота	Герц	<i>Гц</i>	$c^{-1}$
Сила	Ньютон	<i>N</i>	$m \cdot kg \cdot c^{-2}$
Давление	Паскаль	<i>Pa</i>	$m^{-1} kg \cdot c^{-2}$
Энергия, работа, количество теплоты	Джоуль	<i>Дж</i>	$m^2 kg \cdot c^{-2}$
Мощность, поток энергии	Ватт	<i>Вт</i>	$m^2 kg \cdot c^{-3}$

Таблица 6

Моменты инерций однородных твердых тел правильной геометрической формы

Тело	Положения оси	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиусом $R$	Ось симметрии	$m \cdot R^2$
Сплошной цилиндр или диск радиуса $R$	То же	$\frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$
Прямой тонкий стержень длиной $l$	Ось перпендикулярна стержню и проходят через его середину	$\frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$
Прямой тонкий стержень длиной $l$	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2$
Шар радиусом $R$	Ось проходят через центр шара	$\frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$

## 7. Рекомендательный библиографический список

### Учебники и учебные пособия

1. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. СПб., М.: Лань, 2009.
2. Детлаф А.А. Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. М.: Высшая школа, 2009.
3. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. СПб., М.: Лань, 2009.
4. Савельев И.В. Курс физики. Т. 2, 3. СПб.: М.: Лань, 2008.
5. Трофимова Т.И. Курс физики. М.: Высшая школа, 2009.
6. Яворский Б.М. Основы физики т.1,2. / Б.М. Яворский, А.А. Пинский. М.: Наука, 2009.

### Сборники задач

7. Рогачев Н.М. Решение задач по курсу общей физики. СПб., М.: Лань, 2008.
8. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. СПб., М.: Лань, 2007.
9. Трофимова Т.И. Курс физики: задачи и решения. М.: Академия, 2009.
10. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики с решениями. М.: Высш. школа, 2009.

11. *Фирганг Е.В.* Руководство к решению задач по курсу общей физики. М.: Лань, 2009.

12. *Чертов А.Г.* Задачник по физике / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. М.: Физматлит, 2009.

#### **Дополнительная литература**

13. *Калашников Н.П.* Физика. Интернет-тестирование базовых знаний / Н.П. Калашников, Н.М. Кожевников. СПб., М.: Лань, 2009.

Сайт Росаккредагенства [www.fepo.ru](http://www.fepo.ru)

14. *Сена Л.А.* Единицы физических величин и их размерности. М.: Наука, 1977.

15. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики, тт. 1-5, М.: Наука, 2009.

16. *Трофимова Т.И.* Краткий курс физики. М.: Высшая школа, 2010.

17. *Фриш С.Э.* Курс общей физики / С.Э. Фриш, А.В. Тиморева А.В. СПб., М.: Лань, 2008.

## **СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение.....	3
2. Краткое теоретическое содержание .....	3
2.1 Момент силы.....	4
2.2 Момент импульса .....	5
2.3 Кинетическая энергия вращающегося тела. Момент инерции твердого тела .....	6
2.4 Основной закон динамики вращательного движения .....	8
2.5 Работа внешних сил при вращении твердого тела .....	11
2.6 Закон сохранения момента импульса и изотропность пространства.....	11
2.7 Гироскопический эффект. Гироскоп.....	12
3. Лабораторная работа.....	17
4. Требования к содержанию отчёта по лабораторной работе .....	19
5. Рекомендации по защите отчета.....	20
6. Справочные таблицы .....	21
Приставка .....	21
Приставка .....	21
7. Рекомендательный библиографический список .....	23